Klassische Theoretische Physik II

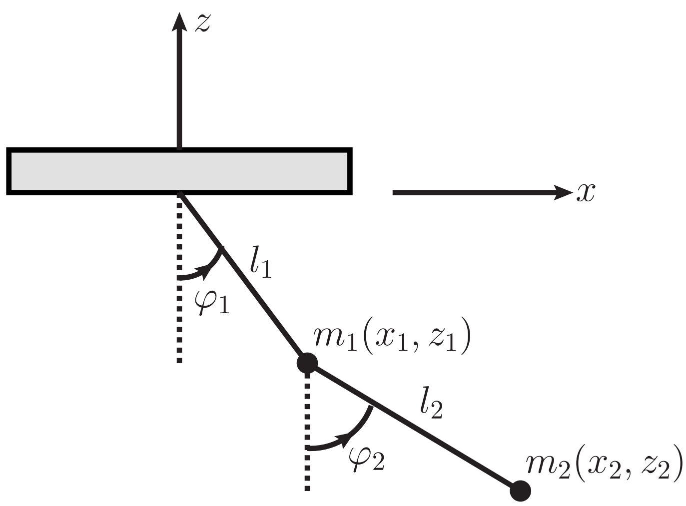
V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 5

Abgabe: Fr, 16.05.14
Besprechung: Di, 20.05.14

Aufgabe 12: Ebenes mathematisches Doppelpendel – Teil 2

(*2+3+3+2+3+2+5=20 Punkte*)



Wir betrachten wieder das Doppelpendel aus Aufgabe 11.

(a) Wählen Sie nun f naheliegende (verallgemeinerte) Koordinaten (s. Skizze). Schreiben Sie die Massenpunktkoordinaten (x_i, y_i), $i = 1, 2$ in diesen Koordinaten auf. Zeigen Sie, dass damit die Zwangsbedingungen identisch erfüllt werden.

(b) Schreiben Sie die Lagrange-Funktion dieses Doppelpendels auf. Verwenden Sie die Näherung kleiner Auslenkungen $\varphi_i \ll 1$, $i = 1, 2$. Achten Sie auf eine korrekte Entwicklungsordnung.

(c) Der kinetische Teil T dieser genäherten Lagrange-Funktion kann diagonalisiert werden. Suchen Sie neue Koordinaten q_i, $i = 1, 2$, so dass gilt: $T = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2} M_i (\dot{q}_i)^2$. Welche Massen M_i erscheinen hier? Das Potential U kann dann (bis auf eine irrelevante Konstante $U_0 =?$) geschrieben werden als $U = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{2} k_{i,j} q_i q_j$. Was ist $k_{i,j}$, $i, j = 1, 2$?

(d) Schreiben Sie die Lagrange-Gleichungen 2. Art in diesen Variablen q_i auf.

(e) Zunächst sucht man spezielle Lösungen, aus denen sich dann durch Superposition (die Bewegungsgleichungen sind linear) die allgemeine Lösung ergibt. Man verwendet **eine** (Kreis-)Frequenz für beide q_i mit dem (komplexen) Ansatz $q_i = A_i \exp(i\omega t)$.
Schreiben Sie damit die Gleichungen für die Konstanten A_i auf.
Es ergibt sich eine Konsistenzbedingung durch Elimination einer der Konstanten, nachdem die andere herausdividiert wurde. Wie sieht diese sog. charakteristische Gleichung für ω^2 aus? Bestimmen Sie deren Lösungen und nennen Sie sie $\omega_\pm^2$. Dies sind die beiden Eigenschwingungsquadrate.

(f) Die allgemeine Lösung ergibt sich nach Superposition dieser beiden Normalschwingungen. Wieviele freie reelle Konstanten erwartet man? Aus welchen Anfangsbedingungen werden sie bestimmt?

Hinweis: Benutzen Sie für die Teilaufgaben (d)-(f) die allgemeinen Ausdrücke als Funktion von M_i und $k_{i,j}$, unter Verwendung von T und U wie in Teilaufgabe (c) definiert. Dies erspart Schreibarbeit, und diese Aufgaben lassen sich dann falls nötig auch unabhängig von den Ergebnissen der vorhergehenden Teilaufgaben lösen.

(g) Zum Abschluss betrachten wir zwei Spezialfälle.
Berechnen Sie für diese jeweils die beiden Frequenzquadrate $\omega_\pm^2$, indem Sie die Definition der M_i und $k_{i,j}$ aus Teilaufgabe (c) einsetzen und passend nähern. Bestimmen Sie außerdem das Verhältnis der Amplituden A_1/A_2 für jede der beiden Frequenzen, und beschreiben Sie die entsprechende Schwingung qualitativ.
Die beiden Spezialfälle sind
 (i) $m_2 \ll m_1$ und
 (ii) $m_2 \gg m_1$.

Hinweis: Falls Sie die M_i und $k_{i,j}$ nicht bestimmen konnten, können Sie versuchen, sich zumindest die qualitative Beschreibung aus allgemeinen Überlegungen herzuleiten.