1/ 12a) verallg. Koordinaten φ_1 und φ_2 $(f = 2\cdot 2 - 2 = 2)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \sin\varphi_1 \\ -l_1 \cos\varphi_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_2 \sin\varphi_2 \\ -l_2 \cos\varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2 \\ -l_1 \cos\varphi_1 - l_2 \cos\varphi_2 \end{pmatrix}$$

$A_1: x_1^2 + z_1^2 - l_1^2 = 0$

$l_1^2 \sin^2\varphi_1 + l_1^2 \cos^2\varphi_1 - l_1^2 = 0$ ✓

$A_2: (x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l_2^2 = 0$

$l_2^2 \sin^2\varphi_2 + l_2^2 \cos^2\varphi_2 - l_2^2 = 0$ ✓

b) Lagrangefkt.:

$$U = \sum_i m_i g z_i = -m_1 g l_1 \cos\varphi_1 - m_2 g (l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2)$$

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{r}_i^2 = \frac{m_1}{2}\left((l_1 \cos\varphi_1 \dot\varphi_1)^2 + (-l_1 \sin\varphi_1 \dot\varphi_1)^2\right)$$
$$+ \frac{m_2}{2}\left((l_1 \cos\varphi_1 \dot\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 \dot\varphi_2)^2 + (-l_1 \sin\varphi_1 \dot\varphi_1 - l_2 \sin\varphi_2 \dot\varphi_2)^2\right)$$

$$= \frac{m_1}{2}\left(l_1^2 \dot\varphi_1^2\right) + \frac{m_2}{2}\Big(l_1^2 \dot\varphi_1^2 + l_2^2 \dot\varphi_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot\varphi_1 \dot\varphi_2 \cdot \underbrace{(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2)}_{= \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}\Big)$$

$\rightarrow L = T - U$

$$= \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot\varphi_1^2 + \frac{m_2}{2}\left(l_2^2 \dot\varphi_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot\varphi_1 \dot\varphi_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$$

$$+ (m_1 + m_2) g l_1 \cos\varphi_1 + m_2 g l_2 \cos\varphi_2$$

2/ b) $\varphi_i \ll 1 \Rightarrow \cos\varphi_i \to 1-\frac{\varphi_i^2}{2}$, $\sin\varphi_i \to \varphi_i$

(Terme im kinet. Teil $\propto \dot\varphi_i^2$ $\to$ Näherung bis 2. Ordnung
$\Rightarrow$ behalte auch im pot. Teil Terme bis φ_i^2
für gemischten Term mit $\cos(\varphi_1-\varphi_2)$ bereits $\dot\varphi_1\dot\varphi_2$
$\to \cos(\varphi_1-\varphi_2)\to 1$)

$$L=\frac{m_1+m_2}{2} l_1^2\dot\varphi_1^2+\frac{m_2}{2}\left(l_2^2\dot\varphi_2^2+2l_1l_2\dot\varphi_1\dot\varphi_2\right)$$
$$+(m_1+m_2)g\,l_1\left(1-\frac{\varphi_1^2}{2}\right)+m_2 g\,l_2\left(1-\frac{\varphi_2^2}{2}\right)$$

c) Bringe T auf Form $\sum_i \frac{M_i}{2}(\dot q_i)^2$:

quadrat. Ergänzung: (oder direkt sehen und umformen)
Form: $A\,l_1^2\dot\varphi_1^2+B\,l_2^2\dot\varphi_2^2+2C\,l_1l_2\dot\varphi_1\dot\varphi_2$

$$=A\,l_1^2\dot\varphi_1^2+B\left(l_2\dot\varphi_2+\frac{C}{B}l_1\dot\varphi_1\right)^2-\frac{C^2}{B}l_1^2\dot\varphi_1^2$$
$$=\left(A-\frac{C^2}{B}\right)l_1^2\dot\varphi_1^2+B\left(l_2\dot\varphi_2+\frac{C}{B}l_1\dot\varphi_1\right)^2$$

hier: $A=\frac{m_1+m_2}{2}$, $B=\frac{m_2}{2}=C$

$$\Rightarrow A-\frac{C^2}{B}=\frac{m_1+m_2}{2}-\frac{m_2}{2}=\frac{m_1}{2}\quad,\quad\frac{C}{B}=1$$

also $T=\frac{m_1}{2}(l_1\dot\varphi_1)^2+\frac{m_2}{2}(l_2\dot\varphi_2+l_1\dot\varphi_1)^2$

$$\Rightarrow M_1=m_1,\ M_2=m_2,\ q_1=l_1\varphi_1,\ q_2=(l_1\varphi_1+l_2\varphi_2)$$
$\Rightarrow l_2\varphi_2=q_2-q_1$

U in neuen generalisierten Koordinaten q_1,q_2:
$$U=\underbrace{-(M_1+M_2)g\,l_1-M_2 g\,l_2}_{=U_0\ \text{Konstante}}+\frac{M_1+M_2}{2}\frac{g}{l_1}q_1^2+\frac{M_2}{2}\frac{g}{l_2}(q_2-q_1)^2$$

$$=U_0+\left(\frac{M_1+M_2}{2}\frac{g}{l_1}+\frac{M_2}{2}\frac{g}{l_2}\right)q_1^2+\left(\frac{M_2}{2}\frac{g}{l_2}\right)q_2^2-2\left(\frac{M_2}{2}\frac{g}{l_2}\right)q_1q_2$$

$$V - V_0 \stackrel{!}{=} \sum_{i,j} \frac{1}{2} k_{i,j} q_i q_j = \frac{1}{2} k_{1,1} q_1^2 + \frac{1}{2} k_{2,2} q_2^2 + \frac{1}{2}(k_{1,2}+k_{2,1}) q_1 q_2$$

$$\Rightarrow k_{1,1} = (M_1 + M_2)\frac{g}{l_1} + M_2 \frac{g}{l_2}$$

$$k_{2,2} = M_2 \frac{g}{l_2}$$

$$k_{1,2} = k_{2,1} = -M_2 \frac{g}{l_2}$$

d) Euler-Lagrange-Gl. (Lagrange-Gl. 2. Art):

$$q_i: \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$q_1: \frac{\partial L}{\partial \dot q_1} = \frac{M_1}{2} \cdot 2\dot q_1 = M_1 \dot q_1$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_1} = M_1 \ddot q_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -\left(k_{1,1} q_1 + \frac{1}{2} k_{1,2} q_2 + \frac{1}{2} k_{2,1} q_2\right)$$

$$\left(= -\left((M_1+M_2)\frac{g}{l_1} + M_2\frac{g}{l_2}\right) q_1 + M_2 \frac{g}{l_2} q_2 \right)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

$$\text{I)} \quad \ddot q_1 = -\frac{k_{1,1}}{M_1} q_1 - \frac{k_{1,2}+k_{2,1}}{2M_1} q_2$$

$$= -\left(\left(1+\frac{M_2}{M_1}\right)\frac{g}{l_1} + \frac{M_2}{M_1}\frac{g}{l_2}\right) q_1 + \frac{M_2}{M_1}\frac{g}{l_2} q_2$$

$$q_2: \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_2} = M_2 \ddot q_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -\left(k_{2,2} q_2 + \frac{k_{1,2}+k_{2,1}}{2} q_1\right) = -M_2 \frac{g}{l_2} q_2 + M_2 \frac{g}{l_2} q_1$$

$$\Rightarrow M_2 \ddot q_2 + M_2 \frac{g}{l_2} q_2 - M_2 \frac{g}{l_2} q_1 = 0$$

$$\text{II)} \quad \ddot q_2 = -\frac{k_{2,2}}{M_2} q_2 - \frac{k_{1,2}+k_{2,1}}{2} q_1$$

$$= -\frac{g}{l_2}(q_2 - q_1)$$

4/

e) Ansatz: $q_i = A_i e^{i\omega t}$

$$\dot{q}_i = i\omega A_i e^{i\omega t}$$

$$\ddot{q}_i = -\omega^2 A_i e^{i\omega t}$$

$$\text{I)} \quad -\omega^2 A_1 e^{i\omega t} = -\frac{k_{11}}{m_1} A_1 e^{i\omega t} + \frac{k_{12}}{m_1} A_2 e^{i\omega t}$$

$$A_1\left(\frac{k_{11}}{m_1} - \omega^2\right) = -A_2 \frac{k_{12}}{m_1}$$

$$\text{II)} \quad -\omega^2 A_2 e^{i\omega t} = -\frac{k_{22}}{m_2} A_2 e^{i\omega t} - \frac{k_{12}}{m_2} A_1 e^{i\omega t}$$

$$A_2\left(\frac{k_{22}}{m_2} - \omega^2\right) = -A_1 \frac{k_{12}}{m_2}$$

$$\text{I) in II)} \quad -A_1 \frac{m_1}{k_{12}}\left(\frac{k_{11}}{m_1} - \omega^2\right)\left(\frac{k_{22}}{m_2} - \omega^2\right) = -A_1 \frac{k_{12}}{m_2}$$

$$\left(\omega^2 + \frac{k_{11}}{m_1}\right)\left(\omega^2 - \frac{k_{22}}{m_2}\right) = \frac{k_{12}^2}{m_1 m_2}$$

Konsistenzbedingung = charakt. Gl.

$$\omega^4 - \left(\frac{k_{11}}{m_1} + \frac{k_{22}}{m_2}\right)\omega^2 + \frac{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}{m_1 m_2} = 0$$

$$\omega_\pm^2 = \frac{+(k_{11}/m_1 + k_{22}/m_2) \pm \sqrt{(k_{11}/m_1 + k_{22}/m_2)^2 - 4(k_{11}k_{22} - k_{12}^2)/m_1 m_2}}{2}$$

$$= \frac{+(k_{11}/m_1 + k_{22}/m_2) \pm \sqrt{(k_{11}/m_1 - k_{22}/m_2)^2 + 4k_{12}^2/m_1 m_2}}{2}$$

Ausdruck unter Wurzel $\geq 0 \Rightarrow$ 2 reelle Lösungen

einsetzen: $\frac{k_{11}}{m_1} + \frac{k_{22}}{m_2} = \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\frac{g}{l_1} + \frac{m_2}{m_1}\frac{g}{l_2} + \frac{g}{l_2}$

$$= \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\left(\frac{g}{l_1} + \frac{g}{l_2}\right)$$

$$\frac{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}{m_1 m_2} = \left[\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\frac{g}{l_1} + \frac{m_2}{m_1}\frac{g}{l_2}\right]\frac{g}{l_2} - \frac{m_2}{m_1}\frac{g^2}{l_2^2}$$

$$= \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\frac{g^2}{l_1 l_2}$$

5/

$$\Rightarrow \omega_\pm^2 = \frac{g}{2}\left(\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right) \pm \sqrt{\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)^2\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right)^2 - 4\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\frac{1}{l_1 l_2}}\right)$$

$$= \frac{g}{2}\left(\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right) \pm \sqrt{\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)}\sqrt{\left(\frac{1}{l_1}-\frac{1}{l_2}\right)^2 + \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right)^2}\right)$$

$$= \frac{g}{2}\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right)\left(1 \pm \sqrt{1-4\frac{l_1 l_2}{(l_1+l_2)^2}\frac{1}{1+\frac{m_2}{m_1}}}\right)$$

aus II):

$$\frac{A_1}{A_2} = -\frac{m_2}{k_{12}}\left(\frac{k_{22}}{m_2} - \omega_\pm^2\right)$$

$$= +\frac{l_2}{g}\left(\frac{g}{l_2} - \omega_\pm^2\right)$$

$$= -\left(\frac{l_2}{g}\omega_\pm^2 - 1\right)$$

$$= \frac{l_2}{2}\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right)\left(1 \pm \sqrt{1-4\frac{l_1 l_2}{(l_1+l_2)^2}\frac{1}{1+\frac{m_2}{m_1}}}\right) - 1$$

f) Anzahl Freiheitsgrade: 4 (2 DGL 2. Ordnung)

2 unabh. Lsg. gefunden: ω_+ und ω_-

$\Rightarrow$ allg. Lösung als Superposition

Anfangsbed. (z.B.): $q_1(t=0)$, $\dot{q}_1(0)$, $q_2(0)$, $\dot{q}_2(0)$

$\rightarrow \varphi_1(0)$, $\dot{\varphi}_1(0)$, $\varphi_2(0)$, $\dot{\varphi}_2(0)$

g) i) $m_2 \ll m_1 \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} \to 0$

$$\Rightarrow \omega_\pm^2 = \frac{g}{2}\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right)\left(1 \pm \sqrt{1-4\frac{l_1 l_2}{(l_1+l_2)^2}}\right)$$

$$= \frac{g}{2}\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right)\left(1 \pm \frac{|l_1-l_2|}{l_1+l_2}\right)$$

$$\omega_{1,2} = \frac{g}{2}\frac{\cancel{l_1+l_2}}{l_1 l_2}\frac{l_1+l_2 \pm (l_1-l_2)}{l_1+l_2} = \begin{cases} g/l_2 \\ g/l_1 \end{cases}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = 1 - \frac{l_2}{g}\frac{g}{l_{2/1}} = \begin{cases} 0 & \text{f. } \omega_1 \\ 1 - l_2/l_1 & \text{f. } \omega_2 \end{cases}$$

6/ $\rightarrow$ 2 Moden: $\omega_1^2 = \frac{g}{l_2}$ $\quad A_1 \sim 0$

oberes Pendel fest, unteres schwingt mit Eigenfrequenz

$$\omega_2^2 = \frac{g}{l_2}$$

Pendel schwingen gleich oder entgegengesetzt abhängig vom Verhältnis der Längen

ii) $m_2 \gg m_1$: $\quad \frac{m_2}{m_1} = \mu \gg 1 \Rightarrow 1+\mu \simeq \mu$

$$\Rightarrow \omega_\pm^2 = \frac{g}{2}\mu \frac{l_1+l_2}{l_1 l_2}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{l_1 l_2}{(l_1+l_2)^2}\frac{1}{\mu}}\right)$$

$$\simeq \frac{g}{2}\mu \frac{l_1+l_2}{l_1 l_2}\left(1 \pm \left(1 - 2\frac{l_1 l_2}{(l_1+l_2)^2}\frac{1}{\mu}\right)\right) \qquad \left(\sqrt{1+\varepsilon} \sim 1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$\omega_+^2 = \frac{g}{2}\mu \frac{l_1+l_2}{l_1 l_2} 2 = g\mu\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)$$

$$\omega_-^2 = \frac{g}{2}\mu \frac{l_1+l_2}{l_1 l_2} 2 \frac{l_1 l_2}{(l_1+l_2)^2}\frac{1}{\mu}$$

$$= \frac{g}{l_1+l_2}$$

$$\frac{A_1^{(-)}}{A_2^{(-)}} = 1 - \frac{l_2}{g}\frac{g}{l_1+l_2} = \frac{l_1}{l_1+l_2}$$

Schwingung als langes Pendel als ob in r_1 fest verbunden und $m_1 = 0$

$$\frac{A_1^{(+)}}{A_2^{(+)}} = 1 - \frac{l_2}{g} g\mu \frac{l_1+l_2}{l_1 l_2} = 1 - \mu\frac{l_1+l_2}{l_1} \sim -\mu\frac{l_1+l_2}{l_1}$$

$\rightarrow$ untere Masse fast in Ruhe, schwingt leicht entgegengesetzt

obere Masse schwingt sehr schnell ($\omega^2 \propto \mu$)