KIT **SS 2014**

Klassische Theoretische Physik II

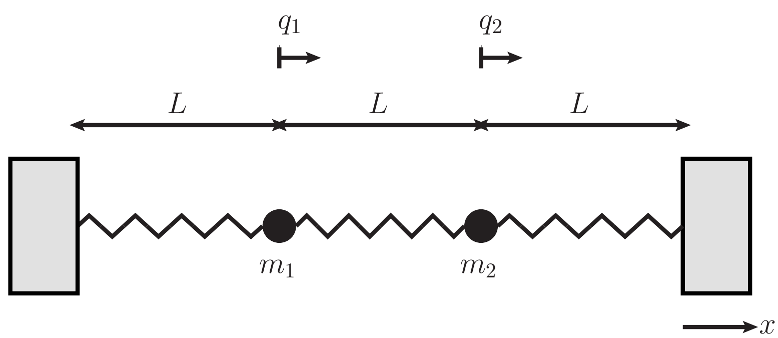
V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 6

Abgabe: Fr, 23.05.14
Besprechung: Di, 27.05.14

Aufgabe 13: Gekoppelte Oszillatoren (*3+1+3+3+2=12 Punkte*)

Zwei Massenpunkte m_1 und m_2 sind miteinander und mit den Wänden rechts und links über identische Federn verbunden (s. Skizze; eindimensionales Problem). Diese schwingen um ihre Ruhelage mit Federkonstante κ. Sonstige Kräfte wie Schwerkraft sollen nicht wirken, außerdem wollen wir nur kleine, lineare Schwingungen betrachten. Die Auslenkung des Massenpunkts m_i aus seiner Ruhelage werde mit q_i bezeichnet ($i = 1, 2$).



(a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion für die Auslenkungen q_i auf und leiten Sie die Bewegungsgleichungen her.

(b) Schreiben Sie die Bewegungsgleichungen in Matrixform

$$M\ddot{\vec{q}} + K\vec{q} = \vec{0}$$

mit $\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ und den 2×2-Matrizen M und K. Bringen Sie diese in die Form $\ddot{\vec{q}} = -A\vec{q}$ mit einer 2×2-Matrix A. Verwenden Sie die Abkürzungen $\omega_i^2 = \frac{\kappa}{m_i}$.

(c) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren von A.
(Bei der Berechnung der Eigenvektoren und in der folgenden Teilaufgabe brauchen die Eigenwerte nicht explizit eingesetzt werden, da sich dadurch keine Vereinfachungen ergeben.)

(d) Die Rotationsmatrix aus den Eigenwerten erzeugt eine neue Basis $\vec{z}$, in der die beiden Schwingungen entkoppeln. Wie hängt $\vec{z}$ mit $\vec{q}$ zusammen? Schreiben Sie die Bewegungsgleichungen für $\vec{z}$ auf und lösen Sie diese.

(e) Betrachten Sie jetzt den Spezialfall $m_1 = m_2 =: m$. Berechnen Sie die allgemeinen Lösungen für $\vec{q}$, ausgedrückt durch κ und m.

Aufgabe 14: Rollpendel (*5+1+2=8 Punkte*)

Im Schwerefeld der Erde ist eine Masse m_1 auf die horizontale x-Achse fixiert, kann sich auf dieser aber frei und ohne Reibung bewegen. An dieser befestigt ist eine Stange der Länge l, an derem anderen Ende sich eine zweite Masse m_2 befindet. Diese kann sich ansonsten frei bewegen, insbesondere auch in y-Richtung.

(a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion dieses Systems auf. Finden Sie dazu geeignete generalisierte Koordinaten, die die Zwangsbedingungen automatisch berücksichtigen.

(b) Gibt es zyklische Koordinaten? Falls ja, was sind die erhaltenen verallgemeinerten Impulse?

(c) Leiten Sie für eine der übrigen Koordinaten die Bewegungsgleichung her.