Klassische Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 7

Abgabe: Fr, 30.05.14
Besprechung: Di, 03.06.14

Aufgabe 14: Teilchen im Magnetfeld (*0.5+3.5+3+1=8 Punkte*)

Auf ein elektrisch geladenes Teilchen mit Masse m und Ladung $Q = qe$ (Elementarladung $e \simeq 1,6 \cdot 10^{-19} As$) wirkt die Lorentzkraft

$$\vec{F} = Q \cdot \left(\vec{E}(\vec{r}, t) + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right) .$$

(a) Wieso lässt sich $\vec{F}$ nicht als Gradient eines Potentials $V(\vec{r}, t)$ ausdrücken?

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass das Potential gegeben ist durch

$$\begin{aligned} V(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) &= Q\ \Phi(\vec{r}, t) - Q\ \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) \\ \text{mit } \vec{E} &= -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \ . \end{aligned}$$

(b) Betrachten Sie eine zeitunabhängige, homogene magnetische Induktion der Form $\vec{B} = B\vec{e}_z$, $\Phi = 0$. Wie sieht in kartesischen Koordinaten das Potential aus, das dieses $\vec{B}$-Feld ergibt?
Schreiben Sie dieses in Zylinderkoordinaten um mit Einheitsvektoren $\vec{e}_\varrho$, $\vec{e}_\varphi$ und $\vec{e}_z$, also geben Sie V_ϱ, V_φ und V_z als Funktion von ϱ, φ und z an.
Schreiben Sie damit die Lagrange-Funktion in Zylinderkoordinaten.
Zwischenergebnis: $\vec{A} = \frac{1}{2} B \varrho \vec{e}_\varphi$.

(c) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen. Welche Variablen sind zyklisch und welche Größen sind folglich erhalten?

(d) Finden Sie die Lösungen der Bewegungsgleichungen für konstantes ϱ.

Aufgabe 15: Integration der Euler-Lagrange-Gleichungen (*1+1=2 Punkte*)

(a) Häufig hängt der Integrand $F(y, y')$ nicht explizit von x ab. Zeigen Sie, dass in diesem Fall

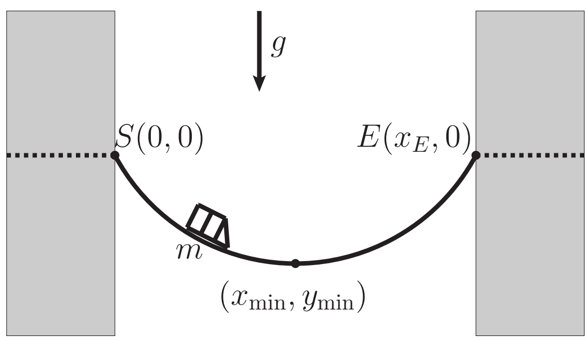
$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.}$$

gilt.

(b) Hängt der Integrand $F(x, y')$ hingegen nicht von y ab, gilt

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.} \; .$$

Aufgabe 16: Kombilösung (*3+5+2=10 Punkte*)



Unter der Kaiserstraße wird ein Tunnel für die Straßenbahn gegraben. Dabei ist die einfachste Möglichkeit, eine horizontale Verbindung zwischen zwei Haltestellen, nicht die idealste. Durch eine leicht nach unten gekrümmte Bahn lässt sich die Gravitation hilfreich ausnutzen. Bei der Ausfahrt aus der Haltestelle wirkt eine zusätzliche Beschleunigung auf die Bahn, während bei der Einfahrt in die nächste Haltestelle die nach oben ansteigende Strecke zusätzlich bremst.

Um die Rechnung nicht zu kompliziert werden zu lassen, verwenden wir einige Vereinfachungen: Die Straßenbahn wird punktförmig mit Masse m angenommen, außerdem vernachlässigen wir den Bereich direkt an der Haltestelle mit Beschleunigung und Verzögerung sowie sämtliche Reibungseffekte. Die Straßenbahn soll also zwischen Startpunkt S $(x_S, y_S) = (0, 0)$ und Endpunkt E $(x_E, y_E) = (x_E, 0)$ nur durch Gravitation beschleunigt werden, und die Strecke kann an den beiden Endpunkten eine nicht-verschwindende Steigung besitzen (s. Skizze).

Gesucht ist diejenige Bahnkurve, die bei gegebener Startgeschwindigkeit v_0 die schnellste Verbindung zwischen den beiden Punkten liefert.

(a) Stellen Sie die Bedingung an die Bahnkurve als Gleichung auf. Finden Sie die integrierte Form der Bewegungsgleichungen und lösen Sie diese nach y' auf.
Die Integrationskonstante kann einfach mit c bezeichnet werden, diese bestimmen wir später.
Ergebnis: $y' = \pm\sqrt{\frac{1}{c^2(v_0^2-2gy)} - 1}$

(b) Integrieren Sie die Gleichung für y' nochmals. Betrachten Sie dabei zunächst nur den Bereich links vom Punkt $(x_{\min}, y_{\min})$, also $0 \leq x \leq x_{\min}$. Das auftretende Integral $\int \mathrm{d}\tilde{y}\sqrt{\frac{\tilde{y}}{1-\tilde{y}}}$ kann durch Substitution mit $\tilde{y} = \sin^2\frac{\varphi}{2}$ gelöst werden. Warum darf in diesem Bereich $0 \leq \varphi \leq \pi$ angenommen werden? Schreiben Sie die Bahnkurve in parametrischer Form, geben Sie also $x(\varphi)$ und $y(\varphi)$ an. Zeigen Sie schließlich, dass sich die gefundene Lösung auf den rechten Bereich $x_{\min} \leq x \leq x_E$ fortsetzen lässt, indem einfach Winkel $\varphi > \pi$ betrachtet werden.
Ergebnis: $x(\varphi) = \frac{1}{4c^2g}(\varphi - \varphi_S - \sin\varphi + \sin\varphi_S)$

(c) Wir betrachten nun den Spezialfall $v_0 = 0$. Bestimmen Sie c aus der Koordinate des Endpunkts E, indem Sie zuerst den Winkel φ_E aus der Gleichung für y ableiten und diesen in x einsetzen. Berechnen Sie daraus $y_{\min}$ und die insgesamt zum Durchfahren der Strecke benötigte Zeit T für eine Streckenlänge $x_E = 1$ km.