Lorentzkraft $\vec{F} = Q \cdot \left(\vec{E}(\vec{r},t) + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r},t) \right)$

a) $\vec{F}$ hängt von $\dot{\vec{r}}$ ab, aber $U(\vec{r},t)$ enthält kein $\dot{\vec{r}}$ und Gradient kann das auch nicht erzeugen.

b) $\vec{B} = B \cdot \vec{e}_z \qquad \vec{E} = \vec{0}$

$\vec{B}$ zeitunabhängig

$\Rightarrow \vec{A}$ zeitunabhängig $\Rightarrow \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$

$\overset{(2.66)}{\Rightarrow} \vec{\nabla} \Phi = 0$

$\Rightarrow \Phi = 0$ o.B.d.A (nur Gradient von Φ kommt nachher vor)

$\vec{\nabla} \times \vec{A} = B \cdot \vec{e}_z$

in Komponenten:

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B$$

$\Rightarrow A_z = 0$

$A_y = A_y(x,y) = \frac{1}{2} B x$

$A_x = A_x(x,y) = -\frac{1}{2} B y$

} auch andere Lösungen möglich, Potential nicht eindeutig bestimmt

in Zylinderkoordinaten: (s. z.B. Bronstein)

$$A_\rho = A_x \cos\varphi + A_y \sin\varphi$$
$$= +\frac{1}{2} B \left(-\rho \sin\varphi \cos\varphi + \rho \cos\varphi \sin\varphi \right) = 0$$

$$A_\varphi = -A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi$$
$$= \frac{1}{2} B \left(+\rho \sin^2\varphi + \rho \cos^2\varphi \right) = \frac{1}{2} B \rho$$

2/ $A_z = 0$ bleibt

Potential in kart. Koord.

$$V = -\frac{1}{2} QB(-\dot{x}y + \dot{y}x)$$

Potential in Zylinderkoord.

$\vec{r}$ in Zylinderkoord.:

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}(\rho\cos\varphi) = \dot{\rho}\cos\varphi - \rho\sin\varphi\,\dot{\varphi}$$
$$\dot{y} = \frac{d}{dt}(\rho\sin\varphi) = \dot{\rho}\sin\varphi + \rho\cos\varphi\,\dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow V = -\frac{1}{2} QB\,(-(\dot{\rho}\cos\varphi - \rho\sin\varphi\dot{\varphi})\rho\sin\varphi + (\dot{\rho}\sin\varphi + \rho\cos\varphi\dot{\varphi})\rho\cos\varphi)$$

$$= -\frac{1}{2} QB\,(-\dot{\rho}\rho\cos\varphi\sin\varphi + \rho^2\sin^2\varphi\dot{\varphi} + \dot{\rho}\rho\sin\varphi\cos\varphi + \rho^2\cos^2\varphi\dot{\varphi})$$

$$= -\frac{1}{2} QB\rho^2\dot{\varphi}$$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} qeB\rho^2\dot{\varphi}$$

$$= L(\rho, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z})$$

c) L hängt nicht von φ und z ab. $\Rightarrow$ zyklisch

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi} + \frac{1}{2} qeB\rho^2 = p_\varphi$$

und $\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} = p_z$ erhalten

freie Bewegung in z-Richtung

3/

p_φ: vgl. Drehimpuls J_z

$$J_z = m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = m\rho^2\dot{\varphi}$$

$\Rightarrow$ erster Term in p_φ ist Drehimpulserhaltung für $B=0$, zweiter Term Zusatz von Induktion B

ρ: $\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} \rightsquigarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\ddot{\rho}$

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} = m\rho\dot{\varphi}^2 + qeB\rho\dot{\varphi}$$

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial L}{\partial \rho} = m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\varphi}^2 - qeB\rho\dot{\varphi}$$

$$0 = m\left(\ddot{\rho} - \rho\left(\dot{\varphi}^2 + \underbrace{\frac{qeB}{m}}_{\text{Zyklotronfrequenz } \omega_0}\dot{\varphi}\right)\right)$$

d) $\rho = \rho_0 = \text{const.} \Rightarrow \dot{\rho} = 0,\ \ddot{\rho} = 0$

$$\rightarrow \quad 0 = -m\rho_0\left(\dot{\varphi}^2 + \frac{qeB}{m}\dot{\varphi}\right)$$

$\Rightarrow * \ \dot{\varphi}_1 = 0 \rightsquigarrow \varphi_1 = \text{const.}$

Teilchen bewegt sich nur in z-Richtung.

$* \ \dot{\varphi}_2 = -\frac{qeB}{m} \rightsquigarrow \varphi_2 = -\frac{qeB}{m}t \ \underbrace{(+\varphi_0)}_{\text{o.B.d.A.} = 0}$

Teilchen bewegt sich im Kreis mit konstanter, durch Stärke des Magnetfelds bestimmter, Winkelgeschwindigkeit

$(* \ \rho_0 = 0)$

4/

75) Euler - Lagrange - Gleichung:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

a) $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$

Betrachte

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$$

$$= \cancel{\frac{\partial F}{\partial x}}^{=0} + \frac{\partial F}{\partial y}y' + \cancel{\frac{\partial F}{\partial y'}y''} - \cancel{y''\frac{\partial F}{\partial y'}} - y'\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)}_{=0 \text{ nach ELG}} \cdot y' = 0$$

$$\Rightarrow F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.}$$

b) $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

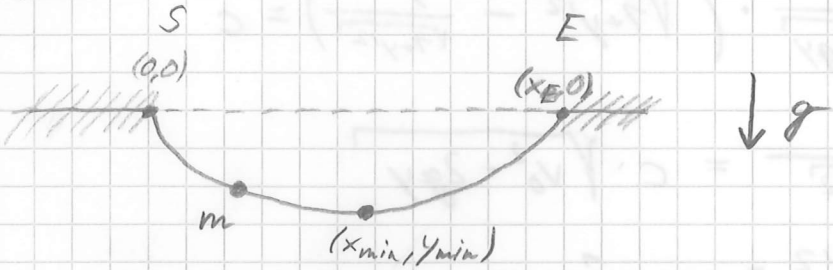
$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.}$$

16) Kombilösung

Gesucht: Brachistochrone
(schnellste Bahn zwischen zwei Punkten)

Lösungsmethode: Variation

Skizze:



Zeit von S nach E:

$$T = \int_S^E \frac{ds}{v(s)}$$

mit $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \equiv \sqrt{1+y'^2}\,dx$

Verwende Energieerhaltung, um $v(s)$ zu bestimmen:

$$E = T + V = \frac{m}{2} v^2 + mgy$$

$$\Rightarrow v^2 = -2gy + \frac{2E}{m}$$

$E = \frac{m}{2} v_0^2$ aus Startbed. bei S

$$\text{also } v^2 = v_0^2 - 2gy$$

$$\Rightarrow T = \int_0^{x_E} dx \sqrt{1+y'^2}\, \frac{1}{\sqrt{v_0^2 - 2gy}} \quad \text{minimal}$$

$$\Rightarrow F = \sqrt{\frac{1+y'^2}{v_0^2 - 2gy}}$$

6

Euler-Lagrange-Gl.:

F hängt nicht explizit von x ab

$\Rightarrow$ integrierte Form $F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = c$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{v_0^2 - 2gy}} \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{v_0^2 - 2gy}} \cdot \left(\sqrt{1+y'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} \right) = c$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = c \cdot \sqrt{v_0^2 - 2gy}$$

$$1 + y'^2 = \frac{1}{c^2 \cdot (v_0^2 - 2gy)}$$

$$y' = \pm \sqrt{\frac{1}{c^2 (v_0^2 - 2gy)} - 1}$$

b) nochmalige Integration:

1. Bereich: $0 \leq x \leq x_{min}$: $y' < 0$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{1}{c^2 (v_0^2 - 2gy)} - 1}$$

$$dx = -\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{c^2 (v_0^2 - 2gy)} - 1}}\, dy \quad | \int$$

$$\int_0^x dx = -\int_0^y dy \sqrt{\frac{c^2 (v_0^2 - 2gy)}{1 - c^2 (v_0^2 - 2gy)}}$$

Subst: $\tilde{y} = c^2 (v_0^2 - 2gy)$

$$d\tilde{y} = -2c^2 g\, dy \quad \Rightarrow dy = \frac{1}{-2c^2 g}\, d\tilde{y}$$

$$x = \frac{1}{2c^2 g} \int_{c^2 v_0^2}^{c^2 (v_0^2 - 2gy)} d\tilde{y} \sqrt{\frac{\tilde{y}}{1 - \tilde{y}}}$$

7/

Subst: $\tilde{y} = \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos\varphi)$

$$d\tilde{y} = 2 \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{1}{2}\,d\varphi = \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2c^2 g}\int_{\varphi_S}^{\varphi} d\tilde{\varphi}\, \underbrace{\sin\frac{\tilde{\varphi}}{2}\cos\frac{\tilde{\varphi}}{2}\sqrt{\frac{\sin^2\frac{\tilde{\varphi}}{2}}{1-\sin^2\frac{\tilde{\varphi}}{2}}}}$$

$$= \sin\frac{\tilde{\varphi}}{2}\cos\frac{\tilde{\varphi}}{2}\left|\frac{\sin\frac{\tilde{\varphi}}{2}}{\cos\frac{\tilde{\varphi}}{2}}\right|$$

$$= \sin^2\frac{\tilde{\varphi}}{2}$$

(Wähle Phase $\tilde{\varphi}$ so, dass $\tilde{\varphi} = \pi$ in y_{min}, $0 \le \varphi_S \le \pi$ für Startpunkt S, $\tilde{\varphi}_S = 0$ f. $v_0 = 0$)

$$= \frac{1}{2c^2 g}\left[\frac{\tilde{\varphi}}{2} - \frac{1}{2}\sin\tilde{\varphi}\right]_{\varphi_S}^{\varphi}$$

$$x(\varphi) = \frac{1}{4c^2 g}\left(\varphi - \varphi_S - \sin\varphi + \sin\varphi_S\right)$$

mit $\sin^2\frac{\varphi_S}{2} = c^2 v_0^2$, $\sin^2\frac{\varphi}{2} = c^2(v_0^2 - 2gy)$

$$\frac{1}{c^2}\sin^2\frac{\varphi}{2} - v_0^2 = -2gy$$

$$y(\varphi) = \frac{1}{2gc^2}\left(c^2 v_0^2 - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right) \quad \underline{\text{Zykloide}}$$

$$= \frac{1}{4c^2 g}\left(2c^2 v_0^2 - 1 + \cos\varphi\right)$$

analog 2. Bereich: $x_{min} \le x \le x_E$

$$\frac{dy}{dx} = +\sqrt{\frac{1}{c^2(v_0^2 - 2gy)} - 1}$$

$$\int_x^{x_E} = \int_y^0 dy \sqrt{\frac{c^2(v_0^2 - 2gy)}{1 - c^2(v_0^2 - 2gy)}}$$

$$= -\int_0^y dy \sqrt{\frac{c^2(v_0^2 - 2gy)}{1 - c^2(v_0^2 - 2gy)}}$$

Möchte Bahngl. aus 1. Bereich möglichst weiterverwenden, also in diesem Bereich $\pi \le \tilde{\varphi} \le 2\pi$: $\sin\frac{\tilde{\varphi}}{2} > 0$, $\cos\frac{\tilde{\varphi}}{2} < 0$

$$x_E - x = \frac{1}{2c^2 g}\int_{\varphi_E}^{\varphi} d\tilde{\varphi}\left(-\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$x_E - x = \frac{-1}{4c^2 g}\left(\varphi - \varphi_E - \sin\varphi + \sin\varphi_E\right)$$

8/

also $x(\varphi_E) = x_E = \frac{1}{4c^2 g}(\varphi_E - \varphi_S - \sin\varphi_E + \sin\varphi_S)$

(Bahngl. 1. Bereich)

in Bahngl. 2. Bereich:

$$x(\varphi) = x_E + \frac{1}{4c^2 g}(\varphi - \varphi_E - \sin\varphi + \sin\varphi_E)$$

$$= \frac{1}{4c^2 g}(\varphi - \varphi_S - \sin\varphi + \sin\varphi_S)$$

→ selbe Bahngleichung

c) Spezialfall: $v = 0 \rightarrow \varphi_S = 0$

$$x(\varphi) = \frac{1}{4c^2 g}(\varphi - \sin\varphi)$$

$$y(\varphi) = \frac{-1}{4c^2 g}(1 - \cos\varphi) \quad \Rightarrow y = 0 \text{ f. } \varphi = 0, 2\pi, \ldots$$

$$\Rightarrow x_E = x(2\pi) = \frac{1}{4c^2 g} \cdot 2\pi \quad \Rightarrow \frac{1}{4c^2 g} = \frac{x_E}{2\pi}$$

$$\Rightarrow y(\varphi) = -\frac{x_E}{2\pi}(1 - \cos\varphi)$$

$$\Rightarrow y_{min} = y(\varphi = \pi) = -\frac{x_E}{\pi}$$

$$T = \int_0^{x_E} dx \sqrt{\frac{1}{-2gc^2 y} \cdot \frac{1}{-2gy}} \quad ; \; dx = \frac{x_E}{2\pi}(1 - \cos\varphi)\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{x_E}{2\pi}(1 - \cos\varphi) \sqrt{\frac{1}{4c^2 g^2} \frac{4c^2 g^2}{(1 - \cos\varphi)^2}}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{x_E}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{g} \frac{2\pi}{x_E}}$$

$$T = \sqrt{\frac{2\pi x_E}{g}}$$

Bsp: $x_E = 1000\,m \Rightarrow y_{min} \approx -318\,m$

$T \approx 25{,}3\,s$ ($\hat{=} 40\,\frac{m}{s} = 142\,\frac{km}{h}$ äquivalente Horizontalgeschw.)

$v_{max} = \sqrt{-2g y_{min}} \approx 79\,\frac{m}{s}$

9/ Bonus: realistischeres Beispiel ($x_E = 1000\,m$)

$v_0 = 20\,\frac{m}{s} \hat{=} 72\,\frac{km}{h}$

Nutze Symmetrie: $\varphi_E = 2\pi - \varphi_S$

$\Rightarrow \sin\varphi_E = -\sin\varphi_S$

$$x_E = x(\varphi_E) = \frac{1}{4c^2g}(\varphi_E - \varphi_S - \sin\varphi_E + \sin\varphi_S)$$

$$= \frac{1}{4c^2g}(2\pi - 2\varphi_S + 2\sin\varphi_S)$$

$$x_E = \frac{1}{2c^2g}(\pi - 2\arcsin(cv_0) + \sin(2\arcsin(cv_0)))$$

nur numerisch lösbar:

$c \simeq 0{,}01261$

$y_{min} = y(\pi) \simeq -300\,m$

$$T = \int_0^{x_E} dx \sqrt{\frac{1}{c^2(v_0^2 - 2gy)^2}}$$

$$= \int_{\varphi_S}^{\varphi_E} d\varphi \frac{1}{4c^2g}(1-\cos\varphi) \frac{1}{c(v_0^2 - 2g\frac{1}{4c^2g}(2c^2v_0^2 - 1 + \cos\varphi))}$$

$$= \int_{\varphi_S}^{\varphi_E} d\varphi \frac{(1-\cos\varphi)}{4c^2g} \frac{1}{c(v_0^2 - v_0^2 + \frac{1}{2c^2}(1-\cos\varphi))}$$

$$= \int_{\varphi_S}^{\varphi_E} d\varphi \frac{1}{2cg} = \frac{1}{2cg}(\varphi_E - \varphi_S)$$

$$= \frac{1}{cg}(\pi - 2\arcsin(cv_0))$$

$$\simeq 21{,}3\,s$$

vgl. horizontale Strecke: $T = \frac{x_E}{v_0} = 50\,s$

$$v_{max} = \sqrt{v_0^2 - 2g y_{min}} \simeq 79{,}3\,\frac{m}{s} \hat{=} 285\,\frac{km}{h}$$

KERNFORSCHUNGSZENTRUM

KARLSRUHE

Oktober 1977 KFK 2531

Realisierbarkeit des Gravitationsantriebes im öffentlichen Nahverkehr zur verlustarmen Bremsenergie-Rückgewinnung auch ohne Linearmotor

V. Jung

GESELLSCHAFT
FÜR
KERNFORSCHUNG M.B.H.

KARLSRUHE