Klassische Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 8

Abgabe: Fr, 06.06.14
Besprechung: Di, 10.06.14

Aufgabe 17: Wirbelstrombremse (*2 Punkte*)

Ein ICE der Masse m fährt auf ebener Strecke in den Bahnhof ein. Am Bahnsteiganfang ($t = 0, x = 0, \dot{x} = v_0$) beginnt der Lokführer, mit der Wirbelstrombremse zu bremsen. Diese beruht auf magnetischer Induktion und erzeugt deshalb eine geschwindigkeitsabhängige Kraft $F = -\gamma\dot{x}$ auf den Zug. Reibungskräfte sind dieser gegenüber zu vernachlässigen.
Benutzen Sie den Lagrange-Formalismus, um den Ort des Zugs als Funktion der Zeit t zu berechnen. Wo kommt der Zug zum Stehen?

Aufgabe 18: Das Problem der Dido (*2+2+4+2+2=12 Punkte*)

Im Jahre 814 v. Chr. landete die vertriebene Prinzessin Dido von Tyros auf der Flucht an der Küste Nordafrikas, wo ein spöttischer Lokalfürst ihr soviel Land zubilligte, „wie unter die Haut eines Ochsen passt“. Die gerissene Prinzessin zerschnitt das Leder in feine Streifen und umspannte damit einen ganzen Landstrich von Küste zu Küste, auf dem sie später die phönizische Siedlung Karthago gründete. In welche Form legte Dido den Hautstreifen?

An einem geraden Flussufer soll eine Weide mit einem gegebenen Seil der Länge L so abgegrenzt werden, dass die von Fluss und Seil eingegrenzte Fläche maximal ist.
Für die Rechnung soll der Fluss die x-Achse bilden und das Seil symmetrisch rechts und links des Ursprungs sein sowie im I. und II. Quadranten verlaufen. Der Anfangspunkt des Seils ist also gegeben durch (x_1, y_1) = (-a,0), der Endpunkt durch (x_2, y_2) = (a,0).
Sie dürfen die Überlegung, dass y um $x = 0$ symmetrisch und dort maximal ist im folgenden ohne weitere Begründung verwenden.

(a) Stellen Sie die Bedingungen an das Seil als Gleichungen auf.

(b) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf und integrieren Sie diese einmal.
Die Integrationskonstante kann einfach mit C bezeichnet werden.

[Ergebnis: $y' = \pm\sqrt{\frac{\lambda^2}{(y-C)^2} - 1}$]

(c) Integrieren Sie die Gleichung für y' nochmals.
Betrachten Sie dafür zunächst nur den Bereich $x > 0$.
[Lösung: $y = C + \sqrt{\lambda^2 - (x+b)^2}$ mit $b^2 = \lambda^2 - (y(0) - C)^2$]

(d) Vereinfachen Sie y mit Hilfe der Bedingung, dass y bei $x = 0$ maximal ist.
Verallgemeinern Sie dann die Lösung für beliebiges x aus Symmetrieüberlegungen.
Welche geometrische Form erkennen Sie?

(e) Stellen Sie Gleichungen auf, mit denen sich die verbleibenden Parameter bestimmen lassen würden und vereinfachen Sie diese soweit möglich. Insbesondere sollen evtl. auftretende Integrale berechnet werden.

Aufgabe 19: Galilei-Gruppe (*5+1=6 Punkte*)

Betrachten Sie die folgenden Galilei-Transformationen des Ortes $\vec{r}$ und der Zeit t mit einer (eigentlichen) Drehmatrix R, zwei Vektoren $\vec{c}$, $\vec{V}$ und einem Skalar a, alle zeitunabhängig:

$$\vec{r}' = R\vec{r} + \vec{c} + \vec{V}t \ , \qquad\qquad t' = t + a \ .$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Transformationen bezüglich Hintereinanderausführung eine (nicht-abelsche) Gruppe bilden.
Bestimmen Sie dazu zunächst das Verknüpfungsgesetz, d.h. geben Sie $g_3 = (R_3, \vec{c}_3, \vec{V}_3, a_3)$ als Funktion der $g_{1,2}$ an, wenn erst eine Transformation mit Parametersatz g_1, dann mit g_2 ausgeführt wird ($g_3 = g_2 \circ g_1$). Wieso ist diese Verknüpfung nicht-abelsch?
Welche Parameter hat das Einselement e?
Welche Parameter gehören zu g^{-1}, dem inversen Element?
Wieso wird diese Verknüpfung das Assoziativgesetz erfüllen (ohne Rechnung)?

(b) Zeigen Sie: Wenn sich ein freier Massenpunkt m in einem Koordinatensystem S geradlinig, gleichförmig bewegt, d.h. $\vec{r} = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$ gilt, dann bewegt er sich auch in einem Koordinatensystem S', welches sich aus S durch eine Galilei-Transformationen ergibt, geradlinig, gleichförmig, d.h. es gilt $\vec{r}' = \vec{v}_0{}'t' + \vec{r}_0{}'$. Wie drücken sich die gestrichenen Größen durch die ungestrichenen aus?
Also geht ein Inertialsystem unter allgemeinen Galilei-Transformationen in ein Inertialsystem über.