17) Reibungskräfte

gerade Bewegung $\rightarrow$ 1-dim. Problem

$$T = \frac{m}{2} \dot{x}^2, \quad V = 0 \quad \Rightarrow \quad L = \frac{m}{2} \dot{x}^2$$

$$\text{Reibungskraft } F = -\gamma \dot{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \gamma \dot{x}$$

$\bar{F}$ Dissipationsfkt. (s. VL)

modifizierte Bew. gl.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \dot{x}} = 0$$

$$m \ddot{x} + \gamma \dot{x} = 0$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = -\frac{\gamma}{m} \dot{x}$$

$$\int_{v_0}^v dx \frac{1}{x} = -\frac{\gamma}{m} \int_0^t dt$$

$$\ln \frac{v}{v_0} = \ln v - \ln v_0 = -\frac{\gamma}{m} t$$

$$\frac{dx}{dt} = v = v_0 \cdot e^{-\frac{\gamma}{m} t}$$

$$x = -\frac{m}{\gamma} v_0 (e^{-\frac{\gamma}{m} t} - 1)$$

$$x = +\frac{m}{\gamma} v_0 (1 - e^{-\frac{\gamma}{m} t})$$

$$t \rightarrow \infty: e^{-\frac{\gamma}{m} t} \rightarrow 0: \quad x(t \rightarrow \infty) = \frac{m}{\gamma} v_0$$

$\rightarrow$ Zug kommt bei $x = \frac{m}{\gamma} v_0$ zum Stehen.

Aufgabe 18: Das Problem der Dido

(2+2+4+2+2=12 Punkte)

Hintergrund zum Aufgabentitel:

Im Jahre 814 v. Chr. landete die vertriebene Prinzessin Dido von Tyros der Sage nach auf der Flucht an der Küste Nordafrikas, wo ein spöttischer Lokalfürst ihr soviel Land zubilligte, „wie unter die Haut eines Ochsen passt“. Die gerissene Prinzessin zerschnitt das Leder in feine Streifen und umspannte damit einen ganzen Landstrich von Küste zu Küste, auf dem sie später die phönizische Siedlung Karthago gründete. In welche Form legte Dido den Hautstreifen?

(a) Aus der Aufgabenstellung lassen sich zwei Bedingungen herauslesen:

- Fläche unter dem Seil ist maximal

$$J[y] = \int_{-a}^a dx y(x) = \text{maximal} \quad (1)$$

- Länge des Seils ist fest

$$L = \int_1^2 ds = \int_{-a}^a dx \sqrt{1 + y'^2} = K[y] = \text{const.} \quad (2)$$

Wir haben also ein Variationsproblem mit isoperimetrischer Nebenbedingung mit den Funktionen

$$\begin{aligned} F &= y \\ G &= \sqrt{1 + y'^2} . \end{aligned}$$

(b) Die Nebenbedingung wird mit Hilfe eines Lagrange-Multiplikators in die zu maximierende Funktion F eingebaut:

$$F \rightarrow \tilde{F} = F + \lambda G = y + \lambda \sqrt{1 + y'^2}$$

Da $\tilde{F}$ keine explizite x -Abhängigkeit besitzt, können wir benutzen:

$$\tilde{F} - y' \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y'} = \text{const.}$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} y + \lambda \sqrt{1 + y'^2} - y' \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} &= C \\ (y - C) \sqrt{1 + y'^2} &= \lambda (y'^2 - (1 + y'^2)) = -\lambda \\ \sqrt{1 + y'^2} &= \frac{-\lambda}{y - C} \\ y' &= \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{(y - C)^2} - 1} \end{aligned}$$

- (c) Wir betrachten zunächst nur den Bereich $x > 0$, in dem gilt $y' < 0$. Die Gleichung der vorhergehenden Teilaufgabe wird durch Separation der Variablen integriert, wobei wir die Größe $y_0 = y(x = 0)$ einführen

$$\int_0^x dx = - \int_{y_0}^y d\tilde{y} \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{(\tilde{y}-C)^2} - 1}}$$

Auf der rechten Seite substituieren wir $y^* = \tilde{y} - C$

$$\begin{aligned} x &= - \int_{y_0-C}^{y-C} dy^* \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{y^{*2}} - 1}} \\ &= - \int_{y_0-C}^{y-C} dy^* \frac{y^*}{\sqrt{\lambda^2 - y^{*2}}} \\ &= \left[\sqrt{\lambda^2 - y^{*2}} \right]_{y_0-C}^{y-C} \\ &= \sqrt{\lambda^2 - (y-C)^2} - \sqrt{\lambda^2 - (y_0-C)^2} \\ x &= \sqrt{\lambda^2 - (y-C)^2} - b \end{aligned}$$

mit $b^2 = \lambda^2 - (y_0 - C)^2$. Diese Gleichung lösen wir nach y auf:

$$\begin{aligned} (x+b)^2 &= \lambda^2 - (y-C)^2 \\ (y-C)^2 &= \lambda^2 - (x+b)^2 \\ y &= C + \sqrt{\lambda^2 - (x+b)^2} \end{aligned}$$

- (d) Die gerade gewonnene Lösung setzen wir in y' ein. Da y an der Stelle $x = 0$ ein Maximum hat, also $y'(0) = 0$, lässt sich daraus eine Bedingung an die noch zu bestimmenden Parameter gewinnen.

$$\begin{aligned} y'(0) &= \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - b^2} - 1} \\ &= \pm \sqrt{\frac{b^2}{\lambda^2 - b^2}} = 0 \\ \Rightarrow b &= 0 \\ \Rightarrow y &= C + \sqrt{\lambda^2 - x^2} \end{aligned}$$

Für den Bereich $x < 0$ gilt aus Symmetriegründen $y(-x) = y(x)$. Da x in obenstehender Gleichung nur quadratisch vorkommt, ist diese folglich für alle x gültig. Formen wir diese noch etwas um

$$x^2 + (y - C)^2 = \lambda^2,$$

führt dies auf die Bahngleichung für einen Kreis mit Mittelpunkt $(0, C)$ und Radius λ .

- (e) Eine Bedingung erhalten wir aus den Endpunkten, da beide auf dieselbe Gleichung führen (die zweite Bedingung aus den Endpunkten hatten wir schon implizit durch die Symmetrieüberlegungen benutzt)

$$\begin{aligned}y(a) &= C + \sqrt{\lambda^2 - a^2} = 0 \\ \Rightarrow C &= -\sqrt{\lambda^2 - a^2}\end{aligned}$$

Die zweite Bedingung liefert die Seillänge

$$\begin{aligned}L &= \int_{-a}^a \sqrt{1 + y'^2} dx \\ &= \int_{-a}^a \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - x^2} - 1} \\ &= \int_{-a}^a \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} \\ L &= 2\lambda \arcsin\left(\frac{a}{\lambda}\right)\end{aligned}$$

Dies ist eine transzendente Gleichung, die analytisch nur für spezielle Werte von a und λ weiter vereinfacht werden kann.

5/ 19) Galilei-Gruppe

a) Betrachte Hintereinanderausführung

$$g_2 \circ g_1 \quad \vec{r} \xrightarrow{g_1} \vec{r}_1 \xrightarrow{g_2} \vec{r}_2$$

$$g_1: \quad \vec{r}_1 = R_1 \vec{r} + \vec{c}_1 + \vec{V}_1 t$$

$$t_1 = t + a_1$$

$$g_3 = g_2 \circ g_1: \quad \vec{r}_2 = R_2 \vec{r}_1 + \vec{c}_2 + \vec{V}_2 t_1$$

$$= R_2 R_1 \vec{r} + R_2 \vec{c}_1 + R_2 \vec{V}_1 t$$

$$+ \vec{c}_2 + \vec{V}_2 t + \vec{V}_2 a_1$$

$$= R_2 R_1 \vec{r}$$

$$+ R_2 \vec{c}_1 + \vec{c}_2 + \vec{V}_2 a_1$$

$$+ (R_2 \vec{V}_1 + \vec{V}_2) t$$

$$t_2 = t_1 + a_2 = t + a_1 + a_2$$

$$\Rightarrow g_3 = (R_2 R_1, R_2 \vec{c}_1 + \vec{c}_2 + \vec{V}_2 a_1, R_2 \vec{V}_1 + \vec{V}_2, a_1 + a_2)$$

Alle Elemente wieder in jeweiliger Gruppe:

$R_3 = R_2 R_1$: Produkt aus Drehmatrizen ist wieder Drehmatrix,

etc.

Betrachte $g_4 = g_1 \circ g_2$

$$\Rightarrow R_4 = R_1 R_2 \stackrel{i.a.}{\neq} R_2 R_1$$

$\Rightarrow$ nicht abelsch

6/ Einselement e

$$\vec{r}_e = R_e \vec{r} + \vec{c}_e + \vec{V}_e t = \vec{r}$$

$$\Rightarrow R_e = \mathbb{1}, \quad \vec{c}_e = \vec{0}, \quad \vec{V}_e = \vec{0}$$

$$t_e = t + a_e = t \quad \Rightarrow a_e = 0$$

$$\Rightarrow e = (\mathbb{1}, \vec{0}, \vec{0}, 0)$$

Inverses Element: $g^{-1} \circ g = e$

$$\text{also } R_{-1} R = \mathbb{1} \quad \Rightarrow R_{-1} = R^{-1} = R^T$$

$$R_{-1} \vec{V} + \vec{V}_{-1} = \vec{0} \quad \Rightarrow \vec{V}_{-1} = -R^T \vec{V}$$

$$a_{-1} + a = 0 \quad \Rightarrow a_{-1} = -a$$

$$R_{-1} \vec{c} + \vec{c}_{-1} + \vec{V}_{-1} a = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{c}_{-1} &= -R^T \vec{c} + R^T \vec{V} a \\ &= R^T (\vec{V} a - \vec{c}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g^{-1} = (R^T, R^T (\vec{V} a - \vec{c}), -R^T \vec{V}, -a)$$

Assoziativgesetz: Abbildungen und Schachtelung von Abbildungen ist immer assoziativ (falls definiert)

2/ b)

Massenpunkt m mit geradlinig, gleichförmiger
Bewegung ($\vec{r}'' = 0$): $\vec{r} = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$
im System S

Transformation in System S' :

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= R \vec{r} + \vec{c} + \vec{V} t \\ &= R \vec{v}_0 t + R \vec{r}_0 + \vec{c} + \vec{V} t \\ &= (R \vec{v}_0 + \vec{V})(t' - \alpha) + R \vec{r}_0 + \vec{c} \\ &= \underbrace{(R \vec{v}_0 + \vec{V})}_{=\vec{v}_0'} t' + \underbrace{R \vec{r}_0 + \vec{c} - \alpha (R \vec{v}_0 + \vec{V})}_{=\vec{r}_0'}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ In S' wieder geradlinig, gleichförmige
Bewegung $\rightarrow$ Inertialsystem