Klassische Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 9

Abgabe: Fr, 13.06.14
Besprechung: Di, 17.06.14

Aufgabe 20: Geschwindigkeitsabhängiges Kraftfeld (*3 Punkte*)

Zeigen Sie, dass eine beliebige Kraft $\vec{F} = \vec{F}(q_i, \dot{q}_i, t)$, welche nur von verallgemeinerten Koordinaten, Geschwindigkeiten und möglicherweise explizit von der Zeit abhängt, nur dann aus einem verallgemeinerten Potential $U(q_i, \dot{q}_i, t)$ in der Lagrangefunktion L hergeleitet werden kann, wenn U höchstens linear in den Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$ ist. Eine Kraft ist hierbei jeder Term der Bewegungsgleichungen, der aus U stammt.

Aufgabe 21: Eichtransformationen der Lagrange-Funktion (*2 Punkte*)

Unter einer Eichtransformation eines Feldes F versteht man allgemein eine Abbildung $F \to F'$, welche seine Bewegungsgleichungen nicht ändert.
Die Lagrange-Funktion L eines Teilchens werde durch die folgende Eichtransformation modifiziert:

$$L'(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} G(\vec{q}, t) \ .$$

Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen für L' gleich zu denen von L sind, indem Sie sie explizit berechnen.

Aufgabe 22: Sattelpunkt der Wirkung (*3+3=6 Punkte*)

Zeigen Sie, dass die Wirkung

$$S = \int_0^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{D}{2} x^2 \right)$$

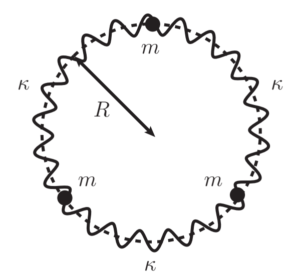
des harmonischen Oszillators für die Bewegung $x(t) = A\sin(\omega t)$ mit $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ weder minimal noch maximal ist, falls t_2 größer als die halbe Schwingungsdauer T ist.

(a) Betrachten Sie eine Variation der Bahnkurve der Form $\hat{x}(t) = x(t) + \epsilon\eta(t)$, welche an den Endpunkten festgehalten wird: $\eta(0) = \eta(t_2) = 0$. Setzen Sie diese in S ein und integrieren Sie partiell, um $\dot{\eta}$ zu eliminieren. Zeigen Sie, dass der Term proportional zu ϵ verschwindet.
Lösung: $\Delta S = S[\hat{x}] - S[x] = -\frac{\epsilon^2}{2}\int_0^{t_2} \mathrm{d}t\eta(m\ddot{\eta} + D\eta)$

(b) Betrachten Sie nun Abweichungen der Form $\eta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{t_2}t\right)$. Dabei sind $b_k \in \mathbb{R}$ beliebige Konstanten.
Für diese gilt die Orthogonalitätsrelation $\int_0^{t_2} \mathrm{d}t \sin\left(\frac{k\pi}{t_2}t\right)\sin\left(\frac{l\pi}{t_2}t\right) = \frac{t_2}{2}\delta_{kl}$.
Setzen Sie diese Abweichungen nun in ΔS ein. Finden Sie eine Bedingung, dass $\Delta S < 0$ sein kann, und leiten Sie daraus eine Bedingung an t_2 ab. Vergleichen Sie diese mit der Schwingungsdauer des harmonischen Oszillators. Zeigen Sie dann, dass sich auch in diesen Fällen immer Bahnkurven η mit $\Delta S > 0$ finden lassen, und damit S weder minimal noch maximal ist.

Aufgabe 23: Ring-Oszillator (*3+4+2=9 Punkte*)

Drei Massenpunkte m bewegen sich reibungsfrei auf einem Kreisring vom Radius R. Sie sind durch drei identische, ideale Federn mit Federkonstante κ entlang der Kreisbögen miteinander verbunden, die in Ruhelage entspannt sind. Es wirken keine weiteren Kräfte.



(a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion in den Koordinaten φ_i ($i = 1, 2, 3$) auf, die als Auslenkung aus einer durch gleiche Federspannung bestimmten Lage definiert sind.
[$L = \frac{m}{2}R^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2) - \kappa R^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_2\varphi_3 - \varphi_3\varphi_1)$]

(b) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen in Matrixform auf. Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen und Eigenschwingungen des Systems, indem Sie sie lösen.

(c) Wie lautet die allgemeine Lösung für die φ_i? Überlegen Sie sich zunächst, was Eigenfrequenz $\omega = 0$ für die Lösung bedeutet.
Falls Sie die vorherige Teilaufgabe nicht lösen konnten, verwenden Sie für die Eigenfrequenzen $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 4$, $\omega_3 = 6$ (dies sind nicht die richtigen Lösungen) und allgemeine Ausdrücke $\vec{v}_i$ für die zugehörigen Eigenvektoren.