Klassische Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 10

Abgabe: Fr, 20.06.14
Besprechung: Di, 24.06.14

Aufgabe 24: Galilei-Transformationen (*3+2+2=7 Punkte*)

Wir betrachten nochmals die Galilei-Transformationen aus Aufgabe 19.

(a) Schreiben Sie die Transformation $g = (R, \vec{c}, \vec{V}, a)$ um in eine infinitesimale Version mit den infinitesimalen Parametern $\vec{\omega}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{v}$ und α. Quadrate solcher Parameter werden gegenüber den Parametern selbst vernachlässigt.
Zwischenschritte für R: Welche Bedingung erhält man aus $R^T R = \mathbb{1}$ und $\det R = +1$ mit $R_{ij} = \delta_{ij} + \omega_{ij}$ für die Matrix ω? Wie definiert man daraus die Komponenten von $\vec{\omega}$?

(b) Betrachten Sie die Lagrange-Funktion eines freien Teilchens $L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2$. Prüfen Sie, für welche infinitesimalen Transformationen der Ausdruck $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\left\{L\left(x^*, \frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}t^*}, t^*\right)\frac{\mathrm{d}t^*}{\mathrm{d}t}\right\}\Big|_{\epsilon=0}$ verschwindet und für welche er eine totale Zeitableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x,t)$ wird. Wie sieht in diesem Fall $f(x,t)$ aus? *(Denken Sie sich für diese Rechnung die infinitesimalen Parameter von (a) als ϵ multipliziert mit den ursprünglichen, also $\omega = \epsilon(R - \mathbb{1})$, $\vec{\gamma} = \epsilon\vec{c}$, etc.)*

(c) Verwenden Sie das Noether-Thorem, um die Erhaltungsgröße $Q = Q(\vec{\omega}, \vec{\gamma}, \vec{v}, \alpha)$, die zu den infinitesimalen Galilei-Transformationen gehört, zu bestimmen. Trennen Sie die infinitesimalen Transformationsparameter ab und definieren Sie den Rest als die Noether-Ladungen, die Konstanten der Bewegung sind. Welche Bedeutung haben diese 10 Erhaltungsgrößen?

Aufgabe 25: Laplace-Runge-Lenz-Vektor (*5+2=7 Punkte*)

Nur in seltenen Fällen gelingt es, neben den zehn Erhaltungsgrößen der Galilei-Transformationen (s. Aufgabe 24) eine weitere elfte, unabhängige Erhaltungsgröße zu finden. Ein Beispiel hierfür ist das $\frac{1}{r}$-Zentralpotential mit der Lagrangefunktion $L = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 + \frac{\alpha}{r}$

mit $r = |\vec{r}|$. Wir definieren drei infinitesimale Transformationen mit zeitlich konstanten Parametern $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$

$$\delta\vec{r} := \vec{r}^* - \vec{r} = 2(\vec{\beta}\cdot\vec{r})\dot{\vec{r}} - \vec{\beta}(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}) - (\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{r}})\vec{r}\ .$$

Die Zeit t wird nicht transformiert.

(a) Schreiben Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für L auf.
Im folgenden wollen wir $\delta L := L(\vec{r}^*, \dot{\vec{r}}^*) - L(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ berechnen: Überzeugen Sie sich davon, dass für die δ-Operation die Produktregel gilt, d.h. $\delta(AB) = \delta(A)B + A\delta(B)$. Zeigen Sie, dass hier auch gilt: $\delta\dot{\vec{r}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\vec{r}$. Finden Sie damit das Resultat

$$\delta L = \frac{2\alpha}{r}\left(-\frac{1}{r^2}(\vec{\beta}\ \cdot\vec{r})(\dot{\vec{r}}\cdot\vec{r}) + \vec{\beta}\cdot\dot{\vec{r}}\right)\ .$$

Dieses Ergebnis kann als Zeitableitung $\delta L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\vec{\beta}, \vec{r})$ geschrieben werden. Geben Sie $f(\vec{\beta}, \vec{r})$ an.

(b) Wenden Sie das (erweiterte) Noether-Theorem an, um eine Erhaltungsgröße $\vec{A}$ (die $2\vec{\beta}$ multipliziert) zu bekommen, den Laplace-Runge-Lenz-Vektor.

Aufgabe 26: Sphärischer Oszillator (*4+1+1=6 Punkte*)

(a) Zeigen Sie, dass der sphärische Oszillator mit

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - \frac{\kappa}{2}\vec{r}^2$$

die Invarianzbedingung des erweiterten Noether-Theorems für die Transformation $r_i^* = r_i + \frac{\epsilon}{2}\sqrt{\frac{m}{\kappa}}\,(\delta_{ik}\dot{r}_l + \delta_{il}\dot{r}_k)$ erfüllt. Dabei laufen k und l von 1 bis 3, es gibt also insgesamt neun mögliche Transformationen. Bestimmen Sie die zugehörigen 9 Erhaltungsgrößen Q_{kl}.

(b) Zeigen Sie, dass dies Energieerhaltung beinhaltet, indem Sie die Hamiltonfunktion H durch die Q_{kl} ausdrücken.

(c) Drücken Sie analog L_i^2 (keine Summe über i) durch die Q_{kl} aus und zeigen Sie, dass daraus Drehimpulserhaltung folgt.