

24) Galilei-Transformation: (aus 1911)

$$\vec{r}' = R\vec{r} + \vec{c} + \vec{V}t$$

$$t' = t + a$$

a) $R^T R = \mathbb{1}$ und $\det R = +1$

(Bedingung für eigentliche Drehung)

Für infinitesimale Drehungen lässt sich R schreiben als

$$R_{ij} = \delta_{ij} + \omega_{ij}$$

Abweichung von $\mathbb{1}$; ω_{ij} klein

$$(R^T R)_{ik} = (\delta_{ji} + \omega_{ji})(\delta_{jk} + \omega_{jk})$$

$$= \delta_{ik} + (\omega_{ik} + \omega_{ki}) + \cancel{\omega_{ji}\omega_{jk}} \quad \text{klein}$$

$$\stackrel{!}{=} \mathbb{1}_{ik} = \delta_{ik}$$

$$\Rightarrow \omega_{ik} + \omega_{ki} = 0 \Rightarrow \text{antisymm. Matrix}$$

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det R = \det(\mathbb{1} + \omega) = \exp(\text{Tr}(\underbrace{\ln(\mathbb{1} + \omega)}_{\approx \omega \text{ (1. Ordnung)}})) = \exp(\text{Tr}(\omega)) = \exp(0) = \mathbb{1}$$

$$\Rightarrow 0 = \det \omega = -\omega_{12}\omega_{23}\omega_{13} + \omega_{13}\omega_{12}\omega_{23} = 0$$

$\leadsto$ automatisch erfüllt

3 Elemente, kann also Vektor definieren

via

$$\omega_i = \epsilon_{ijk} \omega_{jk} \rightarrow \omega_1 = \omega_{23} - \omega_{32} = 2\omega_{23}$$

$$\omega_2 = \omega_{31} - \omega_{13} = -2\omega_{13}$$

$$\omega_3 = \omega_{12} - \omega_{21} = 2\omega_{12}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \epsilon_{jki} \omega_i &= \epsilon_{jki} \epsilon_{ilm} \omega_{lm} = (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) \omega_{lm} \\ &= \omega_{jk} - \omega_{kj} = 2\omega_{jk} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \omega_{jk} = \frac{1}{2} \epsilon_{jki} \omega_i$$

✓ Andere Parameter folgen direkt aus den nicht-infinitesimalen via

$$\left. \begin{aligned} \vec{y} &= \epsilon_c \vec{c} \\ \vec{v} &= \epsilon_v \vec{v} \\ \alpha &= \epsilon_a \alpha \end{aligned} \right\} \epsilon_c, \epsilon_v, \epsilon_a \text{ infinitesimal}$$

$$\begin{aligned} \text{also: } \delta x_i &= x_i' - x_i \big|_{1.\text{ordnung}} \\ &= \omega_{ij} x_j + y_i + v_i t \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} x_j \omega_k + y_i + v_i t \end{aligned}$$

$$\text{oder Vektor: } \delta \vec{x} = \frac{1}{2} \vec{x} \times \vec{\omega} + \vec{y} + \vec{v} t$$

$$\delta t = t' - t \big|_{1.\text{ordnung}} = \alpha$$

b) Noether theorem in erweiterter Form für $L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2$

$$\begin{aligned} \text{Transformationen } x_i &\rightarrow x_i^* = x_i + \epsilon \psi \\ t &\rightarrow t^* = t + \epsilon \varphi \end{aligned}$$

$$\text{wegen } t^* = t + \epsilon \alpha \text{ ist } \frac{dt^*}{dt} = 1 \quad (\varphi = \alpha = \text{const.})$$

$$\psi_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} x_j \omega_k + y_i + v_i t$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} L(x_i^*, \frac{dx_i^*}{dt^*}, t^*) \bigg|_{\epsilon=0} &= \frac{\partial L}{\partial x_i} \psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{\psi}_i + \frac{\partial L}{\partial t} \varphi \\ &\quad + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} (-\dot{x}_i \varphi) + L \dot{\varphi} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{\psi}_i = m \dot{x}_i \left(\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_k \dot{x}_j + v_i \right)$$

$$= m \dot{\vec{r}} \cdot \vec{v} \quad (\epsilon_{ijk} \dot{x}_i \dot{x}_j \omega_k \text{ symm in } i, j) \rightarrow 0$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\underbrace{m \dot{\vec{r}} \cdot \vec{v}}_{=f} \right)$$

$\Rightarrow$ für $\vec{v}$ -Transformation totale Zeitabl. notw., alle anderen verschwinden.

3/

c)

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right) \varphi - f(\vec{x}, t) \\
&= m \dot{x}_i \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} x_j \omega_k + \dot{x}_i + v_i t \right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - m \dot{x}_i^2 \right) \alpha - m \dot{\vec{r}} \cdot \vec{v} \\
&= m \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{r}} \cdot (\vec{r} \times \vec{\omega}) + \dot{\vec{r}} \cdot \vec{v} + \dot{\vec{r}} \cdot \vec{v} t \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \dot{\vec{r}}^2 \alpha - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{v} \right) \\
&= -\frac{\vec{\omega}}{2} (\vec{r} \times (m \dot{\vec{r}})) + \vec{v} \cdot (m \dot{\vec{r}}) + \vec{v} \cdot (m \dot{\vec{r}}) t - m \dot{\vec{r}} \cdot \vec{v} \\
&\quad - \alpha \left(\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 \right)
\end{aligned}$$

→ Erhaltungsgrößen:

Drehimpuls $\vec{r} \times (m \dot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{L}$

Impuls $m \dot{\vec{r}} = \vec{p}$

Energie $\dots \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 = L = E$

Schwerpunktsbewegung $m \dot{\vec{r}} t - m \vec{r} = -\vec{r}_0 \cdot m$
 $\Rightarrow \vec{r} = \dot{\vec{r}} t + \vec{r}_0$

[Vieles von dieser Aufgabe wurde in ähnlicher Form schon in der Vorlesung gezeigt, sollte für die Studenten also recht einfach sein.]

$$25) \quad L = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + \frac{\alpha}{r}$$

(reduzierte Masse; Relativkoordinaten des Zweikörperproblems, Schwerpunktbew. abgespalten)

$$\delta \vec{r} := \vec{r}^* - \vec{r} = 2(\vec{\beta} \cdot \vec{r}) \vec{r} - \vec{\beta}(\vec{r} \cdot \vec{r}) - (\vec{\beta} \cdot \vec{r}) \vec{r}$$

a) ELG:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = \mu \dot{r}_i \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = \mu \ddot{r}_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial r_i} = -\frac{\alpha r_i}{r^3}$$

$$\Rightarrow \mu \ddot{r}_i + \frac{\alpha r_i}{r^3} = 0, i=1,2,3 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vec{r}} = -\frac{\alpha}{\mu} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Produktregel für δ :

$$\begin{aligned} \delta(AB) &= A(x^*)B(x^*) - A(x)B(x) \\ &= A(x+\delta x)B(x+\delta x) - A(x)B(x) \\ &= (A + \delta x A')(B + \delta x B') - AB \quad \text{2. Ordnung} \\ &= (\delta x A')B + A(\delta x B') + (\delta x A')(\delta x B') \\ &= (\delta A)B + A(\delta B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \delta A &= A(x^*) - A(x) = A(x+\delta x) - A(x) \\ &= A(x) + \delta x A'(x) - A(x) = \delta x A'(x) \end{aligned}$$

δB analog

$$\delta(\dot{\vec{r}}) = \left(\frac{d}{dt} \vec{r}\right)^* - \frac{d}{dt} \vec{r}$$

$$= \frac{d}{dt^*} \vec{r}^* - \frac{d}{dt} \vec{r}$$

$$= \frac{d}{dt} \vec{r}^* \cdot \frac{dt}{dt^*} - \frac{d}{dt} \vec{r}$$

Zeit nicht transformiert: $t = t^*$

$$= \frac{d}{dt} (\vec{r}^* - \vec{r}) = \frac{d}{dt} (\delta \vec{r})$$

$$\frac{dt}{dt^*} = 1$$

Ansonsten: $\frac{dt}{dt^*} = 1 - \epsilon \dot{\varphi}$

$$\delta(\dot{\vec{r}}) = \frac{d}{dt} (\delta \vec{r}) - \epsilon \dot{\varphi} \vec{r}$$

5/ Jetzt δL :

$$\delta L = L^* - L = \frac{\mu}{2} (\dot{\vec{r}}^*)^2 + \frac{\alpha}{r^*} - \left(\frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 + \frac{\alpha}{r} \right)$$

$$= \frac{\mu}{2} \left[(\dot{\vec{r}} + \delta \dot{\vec{r}})^2 - \dot{\vec{r}}^2 \right] + \alpha \left(\frac{1}{r + \delta r} - \frac{1}{r} \right)$$

$$\frac{1}{r + \delta r} = \left[(\vec{r} + \delta \vec{r})^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = (\vec{r}^2 + 2\vec{r} \cdot \delta \vec{r} + (\delta \vec{r})^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{r} \left(1 + 2 \frac{\vec{r} \cdot \delta \vec{r}}{r^2} + \frac{(\delta \vec{r})^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\stackrel{1. \text{ Ordnung}}{=} \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\vec{r} \cdot \delta \vec{r}}{r^2} \right) \quad \left(\text{vgl. } \sqrt{1+\varepsilon} \sim 1 + \frac{\varepsilon}{2} + O(\varepsilon^2) \right)$$

$$= \frac{1}{r} - \frac{\vec{r} \cdot \delta \vec{r}}{r^3}$$

$$\delta L = \mu \dot{\vec{r}} \delta \dot{\vec{r}} - \alpha \frac{\vec{r} \cdot \delta \vec{r}}{r^3}$$

$$= \mu \dot{\vec{r}} \frac{d}{dt} (\delta \vec{r}) - \alpha \frac{\vec{r} \cdot \delta \vec{r}}{r^3}$$

$$= \mu \dot{\vec{r}} \frac{d}{dt} (2(\vec{\beta} \cdot \vec{r}) \dot{\vec{r}} - (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) \vec{\beta} - (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{r}}) \vec{r})$$

$$- \alpha \frac{\vec{r}}{r^3} (2(\vec{\beta} \cdot \vec{r}) \dot{\vec{r}} - (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) \vec{\beta} - (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{r}}) \vec{r})$$

$$= \mu \dot{\vec{r}} \left(2(\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{r}}) \dot{\vec{r}} + 2(\vec{\beta} \cdot \vec{r}) \ddot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}^2 \vec{\beta} - (\vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}}) \vec{\beta} - (\vec{\beta} \cdot \ddot{\vec{r}}) \vec{r} - (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{r}}) \dot{\vec{r}} \right)$$

$$- \frac{\alpha}{r^3} (2(\vec{\beta} \cdot \vec{r}) (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) (\vec{r} \cdot \vec{\beta}) - (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{r}}) r^2)$$

$$\stackrel{\text{ELG}}{=} \mu \frac{-\alpha}{r^3} (2(\vec{\beta} \cdot \vec{r}) (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}}^2 (\vec{\beta} \cdot \vec{r}) - (\vec{\beta} \cdot \vec{r}) (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}))$$

$$- \frac{\alpha}{r^3} ((\vec{\beta} \cdot \vec{r}) (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - r^2 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{r}}))$$

$$= - \frac{2\alpha}{r} \left(\frac{1}{r^2} (\vec{\beta} \cdot \vec{r}) (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - \vec{\beta} \cdot \dot{\vec{r}} \right)$$

6/

Suche $f(\vec{\beta}; \vec{r})$, sodass $\delta L = \frac{d}{dt} f(\vec{\beta}, \vec{r})$:

Zweiter Term suggeriert $f = \frac{2\alpha}{r} \vec{\beta} \cdot \vec{r}$

$$\frac{d}{dt} f = 2\alpha \left(-\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \dot{\vec{r}} (\vec{\beta} \cdot \vec{r}) + \frac{1}{r} \vec{\beta} \cdot \dot{\vec{r}} \right) = \delta L$$

b) ε steckt implizit in $\vec{\beta}$:

$$\vec{\psi} = \delta \vec{r}$$

$$\varphi = 0$$

$$\begin{aligned} a = 2\vec{\beta} \cdot \vec{A} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \psi_i + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \dot{r}_i \right) \varphi - f \\ &= \mu \left(2(\vec{\beta} \cdot \vec{r}) \dot{\vec{r}}^2 - (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{r}})(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) \cdot 2 \right) - \frac{2\alpha}{r} \vec{\beta} \cdot \vec{r} \\ &= 2\vec{\beta} \cdot \left(\mu (\vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}} (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})) - \frac{\alpha \vec{r}}{r} \right) \end{aligned}$$

$$\vec{A} = \mu \dot{\vec{r}} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) - \frac{\alpha \vec{r}}{r}$$

$$\left(\text{mit } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \right)$$

$$= \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \alpha \frac{\vec{r}}{r} \quad \left(\vec{L} = \vec{r} \times (\mu \dot{\vec{r}}) \right)$$

$\vec{A}$: Laplace-Lenz-Runge-Vektor

(auch Runge-Lenz- oder Lenzscher Vektor)

verantwortlich, dass im gebundenen Fall

($E < 0$, $\Rightarrow V_{\text{eff}} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$) die Bahnen geschlossen sind.

$\vec{A}$ zeigt vom Zentrum ($\vec{r} = \vec{0}$) zum Perihel, d.h. Perihel fix

[ART: Korrekturterme zu $\frac{1}{r} \Rightarrow$ Periheldrehung]
Merkur: $43,03''/\text{Jahrhundert}$

26) Sphärischer Oszillator

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - \frac{k}{2} \vec{r}^2$$

a) Transformation:

$$r_i^* = r_i + \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} (\delta_{ik} \dot{r}_e + \delta_{il} \dot{r}_k)$$

$$\text{mit } i, k, l = 1, \dots, 3$$

$$\Rightarrow \psi_i = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} (\delta_{ik} \dot{r}_e + \delta_{il} \dot{r}_k)$$

$$t^* = t \Rightarrow \varphi = 0; \quad \frac{dt^*}{dt} = 1$$

$$\text{ELG: } m \ddot{\vec{r}} + k \vec{r} = 0$$

$$\ddot{r}_i = -\frac{k}{m} r_i$$

Betrachte

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left(L(\vec{r}^*, \dot{\vec{r}}^*, t^*) \frac{dt^*}{dt} \right) \Big|_{\varepsilon=0}$$

$$= \frac{\partial L}{\partial r_i} \psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \dot{\psi}_i$$

$$= -k r_i \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} (\delta_{ik} \dot{r}_e + \delta_{il} \dot{r}_k)$$

$$+ m \dot{r}_i \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} (\delta_{ik} \ddot{r}_e + \delta_{il} \ddot{r}_k)$$

$$= -\frac{\sqrt{mk}}{2} r_i (\delta_{ik} \dot{r}_e + \delta_{il} \dot{r}_k)$$

$$- \frac{\sqrt{mk}}{2} \dot{r}_i (\delta_{ik} r_e + \delta_{il} r_k)$$

$$= -\frac{\sqrt{mk}}{2} (r_k \dot{r}_e + r_e \dot{r}_k) \cdot 2$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\underbrace{-\sqrt{mk} r_k r_e}_{=f} \right)$$

8/

Erhaltungsgrößen:

$$\begin{aligned}
 Q_{kl} &\stackrel{\varphi=0}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \dot{\varphi}_i - f \\
 &= m \dot{r}_i \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} (\delta_{ik} \dot{r}_e + \delta_{ie} \dot{r}_k) \\
 &\quad + \sqrt{mk} r_k r_e \\
 &= \sqrt{mk} \left(\frac{m}{k} \dot{r}_k \dot{r}_e + r_k r_e \right)
 \end{aligned}$$

b) Energieerhaltung:

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \dot{r}_i - L = m \dot{r}_i^2 - \left(\frac{m}{2} \dot{r}_i^2 - \frac{k}{2} r_i^2 \right) \\
 &= \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + \frac{k}{2} \vec{r}^2 \\
 &= \frac{k}{2} \left(r_i r_i + \frac{m}{k} \dot{r}_i \dot{r}_i \right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \sum_i Q_{ii} = \text{const.}
 \end{aligned}$$

c) Drehimpulserhaltung:

$$\begin{aligned}
 L_{ik} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} \dot{\varphi}_i - \varphi_i \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} \\
 &= m \dot{r}_i \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} (\delta_{ik} \dot{r}_e - r_k \dot{r}_i) \\
 &= \frac{m^2}{4} \sqrt{\frac{k}{m}} (\dot{r}_i^2 - \dot{r}_e^2 - 2 r_k \dot{r}_i \dot{r}_e) \\
 &= \frac{m}{4} \sqrt{\frac{k}{m}} \left(\left(\frac{m}{k} \dot{r}_i^2 - \frac{m}{k} \dot{r}_e^2 \right) - 2 r_k \sqrt{\frac{m}{k}} \dot{r}_i \dot{r}_e \right) \\
 &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{m}{k}} \left(\left(\frac{m}{k} \dot{r}_i^2 - \frac{m}{k} \dot{r}_e^2 \right) - 2 r_k \dot{r}_i \dot{r}_e \right) \\
 &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{m}{k}} (\dot{Q}_{ii} - \dot{Q}_{ee}) \\
 &= \text{const.}
 \end{aligned}$$

9

c) Drehimpulserhaltung

$$L_i^2 = (m \epsilon_{ijk} r_j \dot{r}_k)^2$$

Betrachte L_1^2 :

$$\begin{aligned} L_1^2 &= m^2 (\epsilon_{123} r_2 \dot{r}_3 + \epsilon_{132} r_3 \dot{r}_2)^2 \\ &= m^2 (r_2 \dot{r}_3 - r_3 \dot{r}_2)^2 \\ &= \frac{m^2}{2} [(\epsilon_{123})^2 (r_2 \dot{r}_3 - r_3 \dot{r}_2)^2 + (\epsilon_{132})^2 (r_3 \dot{r}_2 - r_2 \dot{r}_3)^2] \\ &= \frac{m^2}{2} (\epsilon_{ijk})^2 (r_j \dot{r}_k - r_k \dot{r}_j)^2 \end{aligned}$$

analog für $i=2,3$ (zyklische Permutation)

$$\begin{aligned} L_i^2 &= \frac{m^2}{2} (\epsilon_{ijk})^2 (r_j \dot{r}_k - r_k \dot{r}_j)^2 \\ &= \frac{m^2}{2} (\epsilon_{ijk})^2 (r_j^2 \dot{r}_k^2 + r_k^2 \dot{r}_j^2 - 2 r_j r_k \dot{r}_j \dot{r}_k) \\ &= \frac{m^2}{2} (\epsilon_{ijk})^2 \left[\left(\sqrt{\frac{k}{m}} r_j^2 + \sqrt{\frac{m}{k}} \dot{r}_j^2 \right) \left(\sqrt{\frac{k}{m}} r_k^2 + \sqrt{\frac{m}{k}} \dot{r}_k^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\sqrt{\frac{k}{m}} r_j r_k + \sqrt{\frac{m}{k}} \dot{r}_j \dot{r}_k \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk}^2 (a_{jj} a_{kk} - a_{jk}^2) \\ &= \text{const.} \end{aligned}$$