Klassische Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 11

Abgabe: Fr, 27.06.14
Besprechung: Di, 01.07.14

Aufgabe 27: Ring-Oszillator – Teil 2 (*1+2=3 Punkte*)

Wir betrachten nochmals den Ring-Oszillator aus Aufgabe 23.

(a) Finden Sie ausgehend von der Beobachtung, dass eine Eigen-"schwingung" des Systems der Translation aller Massenpunkte um denselben Winkel φ entspricht, eine zugehörige Transformation der Form $\varphi_i^* = \varphi_i + \epsilon\psi_i$, welche die Lagrangefunktion nicht verändert ($t^* = t$).

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Noether-Theorems die dazugehörige Noetherladung. Zeigen Sie dabei zunächst die Anwendbarkeit des Noether-Theorems auf die von Ihnen gefundene Transformation. Finden Sie eine weitere Erhaltungsgröße.

Aufgabe 28: Euler-Winkel (*2+2+3=7 Punkte*)

Eine allgemeine Drehung im dreidimensionalen Raum lässt sich über die sogenannten Euler-Winkel parametrisieren. Dabei wird aus dem kartesischen Rechtskoordinatensystem $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ ein neues kartesisches Rechtskoordinatensystem $\{\vec{e}_x{}''', \vec{e}_y{}''', \vec{e}_x{}'''\}$ mit Hilfe einer Drehmatrix D. Diese lässt sich zerlegen in die Hintereinanderausführung dreier Drehungen:

1. Winkel φ um die $\vec{e}_z$-Achse $\rightarrow \vec{e}_i{}'$
2. Winkel ϑ um die (neue) $\vec{e}_x{}'$-Achse $\rightarrow \vec{e}_i{}''$
3. Winkel ψ um die (neue) $\vec{e}_z{}''$-Achse $\rightarrow \vec{e}_i{}'''$

(Skizze s. Skript, Abb. 4.4. In der Literatur finden sich neben dieser (z, x', z'')-Konvention auch andere mit (z, y', z'') oder (z, y', x'') sowie anderen Bezeichnungen der Winkel.)

(a) Schreiben Sie die Matrix $D(\varphi, \vartheta, \psi)$ als Matrixprodukt dreier Drehmatrizen, sodass gilt $\vec{e}_i{}''' = \sum_{j=1}^{3} D_{ij}\vec{e}_j$. Wie erhält man die Komponenten $x_i{}'''$ eines Vektors $\vec{r}$ bezüglich des 3-gestrichenen Koordinatensystems aus denen des ungestrichenen (Rechnung ohne explizites Ausmultiplizieren von D)?

(b) Die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ lassen sich aus der Drehmatrix D mit Hilfe der Formel $\omega_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{klm}(\dot{D}D^T)_{lm}$ gewinnen. Zeigen Sie, dass bei einem Produkt von zwei Drehmatrizen $D = D_2 D_1$ für die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \vec{\omega}_2 + D_2\vec{\omega}_1$ gilt, wenn $\vec{\omega}_i$ zur Drehung D_i, $i = 1, 2$ gehört. Nutzen Sie dafür die Identität $\varepsilon_{klm}D_{lp}D_{mq} = \varepsilon_{jpq}D_{kj}$.

(c) Berechnen Sie damit $\vec{\omega}(\varphi, \vartheta, \psi)$ für die Drehung $D(\varphi, \vartheta, \psi)$. Wie sieht nach der Gleichung aus der vorherigen Teilausgabe $\vec{\omega}_\varphi$ aus? Folgern Sie daraus $\vec{\omega}_\vartheta$ und $\vec{\omega}_\psi$.

Aufgabe 29: Lagrangefunktion in Nichtinertialsystemen (*3+3+2+2=10 Punkte*)

Ein Bezugssystem KS' mit Ursprung $O'(t)$ und kartesischer Basis $\vec{e}_1{}'(t)$, $\vec{e}_2{}'(t)$, $\vec{e}_3{}'(t)$ hänge mit einem Inertialsystem IS mit Ursprung O und kartesischer Basis $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ wie folgt zusammen:

$$\overrightarrow{O\,O'(t)} = \vec{R}(t) \qquad\qquad \vec{e}_i{}'(t) = \sum_{j=1}^{3} D_{ij}\vec{e}_j$$

mit einer Drehmatrix $D(t)$ ($D^TD = DD^T = \mathbb{1}$, $\det D = +1$).

Ein Raumpunkt P wird beschrieben durch $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^3 r_i\vec{e}_i$ oder durch $\vec{r}\,' = \overrightarrow{O'(t)P} = \sum_{i=1}^3 r_i'\vec{e}_i{}'(t)$. Die Zeit wird nicht transformiert: $t' = t$.

(a) Drücken Sie $\dot{\vec{e}}_i{}'(t)$ durch $\vec{e}_i{}'(t)$ aus. Verwenden Sie dazu $\vec{e}_j = D^T_{jk}(t)\vec{e}_k{}'(t)$.
Definieren Sie die Matrix $\Omega(t) := \dot{D}(t)D^T(t)$. Zeigen Sie unter Verwendung der allgemeinen Regel $(AB)^T = B^TA^T$ die Antisymmetrie dieser Matrix: $\Omega^T(t) = -\Omega(t)$.
Definieren Sie einen Vektor $\vec{\omega}(t) := \sum_{k=1}^3 \omega_k(t)\vec{e}_k{}'(t)$ mit den Komponenten ω_k im KS' System aus $\Omega_{ij}(t) = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk}\omega_k(t)$ mit dem total antisymmetrischen Levi-Civita-Tensor ϵ. Verwenden Sie dann, dass die $\{\vec{e}_i{}'\}_{i=1}^3$ ein orthonormales Rechtssystem sind, um zu zeigen

$$\dot{\vec{e}}_i{}'(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{e}_i{}'(t)\,.$$

Wie erhält man die ω_k aus Ω_{ij}?

(b) Der Massenpunkt P bewege sich. Zeigen Sie, dass gilt $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$, mit $\vec{v}\,' := \sum_{i=1}^3 \dot{r}_i{}'\vec{e}_i{}'(t)$ ($\dot{r}_i{}' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r_i{}'$ Geschwindigkeitskomp. von P im System KS').
Verifizieren Sie auch $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} + \vec{b}\,' + 2\vec{\omega}\times\vec{v}\,' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}\,'$, mit $\vec{b}\,' := \sum_{i=1}^3 \ddot{r}_i{}'\vec{e}_i{}'(t)$ ($\ddot{r}_i{}'$ Beschleunigungskomponenten des Punktes P im System KS').

(c) Schreiben Sie die im IS gültige Lagrangefunktion $L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r})$ auf KS'-Größen um, und trennen Sie eine totale Zeitableitung $m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\vec{R}}\cdot\vec{r}\,')$ ab, die im weiteren weggelassen werden kann. Verwenden Sie $\hat{U}(\vec{r}\,') = U(\vec{R} + \vec{r}\,')$.
Ergebnis: $L = \frac{1}{2}m\vec{v}\,'^2 + m\vec{v}\,'\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') + \frac{1}{2}m(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')^2 - \hat{U}(\vec{r}\,') + \frac{1}{2}m\dot{\vec{R}}^2 - m\vec{r}\,'\cdot\ddot{\vec{R}}$.

(d) Die gefundene Lagrangefunktion kann, bei Vorgabe von $\vec{R}(t) = \sum_{i=1}^3 R_i(t)'\vec{e}_i{}'(t)$ und $\vec{\omega}(t) = \sum_{i=1}^3 \omega_i(t)\vec{e}_i{}'(t)$, als $L(r_i', v_i')$ interpretiert werden.
Schreiben Sie die Euler-Lagrange-Gl. mit Index i auf. Wenden Sie zum Schluss $\sum_{i=1}^3 \vec{e}_i{}'(t)$ auf diese Gleichungen mit Index i an, um daraus eine Vektorgleichung zu erhalten.