1/

27)

a) Alle Massen um den gleichen Winkel verschoben:

$$\varphi_i^* = \varphi_i + \varepsilon \cdot 1 \quad \Rightarrow \psi_i = 1$$

Kontrolle: Einsetzen in Lagrangefunktion:

$$\dot{\varphi}_i^* = \dot{\varphi}_i^* \quad \Rightarrow T \text{ unverändert}$$

$$\varphi_i^* \varphi_j^* = (\varphi_i + \varepsilon)(\varphi_i + \varepsilon) = \varphi_i \varphi_i + \varepsilon \varphi_i + \varepsilon \varphi_j + \varepsilon^2$$

$$U^* = kR^2(\varphi_1^{*2} + \varphi_2^{*2} + \varphi_3^{*2} - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_2\varphi_3 - \varphi_1\varphi_3)$$

$$= U + kR^2\varepsilon(2\varphi_1 + 2\varphi_2 + 2\varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_3)$$

$$+ kR^2\varepsilon^2(1+1+1-1-1-1)$$

$$= U \quad \Rightarrow L \text{ unverändert}$$

b) $t^* = t \quad \Rightarrow \varphi = 0 \quad , \quad \frac{dt^*}{dt} = 1$

Zeige, dass Noether-Theorem anwendbar:

Bed: $$\frac{d}{d\varepsilon}\left(L(\varphi_i^*, \dot{\varphi}_i^*, t^*)\frac{dt^*}{dt}\right|_{\varepsilon=0} = 0$$

bereits oben gesehen $L^* = L$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\varepsilon}(L \cdot 1)_{\varepsilon=0} = 0 \Rightarrow \text{erfüllt } (f=0)$$

Noetherladung:

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i}\psi_i = mR^2(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3)$$

2/

vgl. Drehimpulserhaltung

$$\vec{L} = \sum_i m \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$$

$$= \sum_i m R \cdot R \cdot \dot{\varphi}_i \, \vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi$$

$$= m R^2 \sum_i \dot{\varphi}_i \, \vec{e}_z$$

$\Rightarrow$ Noetherladung = Drehimpuls

weitere Erhaltungsgröße: Energie

da $\frac{\partial}{\partial t} L = 0$

3/

28) a) Drehung um z-Achse mit Winkel φ

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(analog Drehung um x-Achse)

Nachfolgende Drehung jeweils definiert als Drehung um neue Achse

$\Rightarrow$ einfache Hintereinanderausführung

$$D_\vartheta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$D_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D(\varphi,\vartheta,\psi) = D_\psi D_\vartheta D_\varphi$$

$$\rightarrow \vec{e}_i^{\,'''} = \sum_{j=1}^{3} D_{ij} \vec{e}_j$$

$\vec{r}$ in beiden Systemen derselbe Vektor

$$\vec{r} = \sum_i x_i \vec{e}_i = \sum_j x_j''' \vec{e}_j^{\,'''}$$

$$= \sum_j x_j''' \sum_{i=1}^{3} D_{ji} \vec{e}_i$$

muss für jedes i einzeln gelten ($\vec{e}_i$ orthogonal)

$$x_i = \sum_j x_j''' D_{ji} \qquad | \cdot D^T$$

$$\sum_i x_i D^T_{ik} = \sum_j x_j''' \underbrace{\sum_i D_{ji} D^T_{ik}}_{=\delta_{jk}} = x_k''' \quad (D \text{ orthogonal})$$

$$x_k''' = \sum_i D_{ki} x_i$$

4

b) $$\omega_k = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{klm}\,(\dot{D}D^T)_{lm}$$

Daraus: $$\omega_{21\,i} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}\left[\frac{d}{dt}(D_2 D_1)(D_2 D_1)^T\right]_{jk}$$

$$= \frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}\Big[\dot{D}_2 \underbrace{D_1 D_1^T}_{=\mathbb{1}} D_2^T + D_2 \dot{D}_1 D_1^T D_2^T\Big]_{jk}$$

$$= \frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}\left[\dot{D}_2 D_2^T + D_2 \dot{D}_1 D_1^T D_2^T\right]_{jk}$$

$$= \omega_{2i} + \frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}\, D_{2\,jl}\,(\dot{D}_1 D_1^T)_{lm}\, D_{2\,km}$$

$$= \omega_{2i} + \frac{1}{2}\,\varepsilon_{nlm}\, D_{2\,in}\,(\dot{D}_1 D_1^T)_{lm}$$

$$= \omega_{2i} + D_{2\,in}\,\frac{1}{2}\,\varepsilon_{nlm}\,(\dot{D}_1 D_1^T)_{lm}$$

$$= \omega_{2i} + D_{2\,in}\,\omega_{1n}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\omega}_{21} = \vec{\omega}_2 + D_2\,\vec{\omega}_1$$

c) $$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\psi + D_\psi\,\vec{\omega}_{\vartheta\varphi}$$

$$= \vec{\omega}_\psi + D_\psi\left(\vec{\omega}_\vartheta + D_\vartheta\,\vec{\omega}_\varphi\right)$$

$$= \vec{\omega}_\psi + D_\psi\,\vec{\omega}_\vartheta + D_\psi D_\vartheta\,\vec{\omega}_\varphi$$

$\vec{\omega}_\varphi$: $$\omega_{\varphi i} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}\begin{pmatrix} -\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} & \cos\varphi\cdot\dot{\varphi} & 0 \\ -\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} & -\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{jk}$$

$$= \frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}\begin{pmatrix} 0 & \dot{\varphi} & 0 \\ -\dot{\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{jk}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\varepsilon_{i21}(-\dot{\varphi}) + \varepsilon_{i12}\,\dot{\varphi}\right] = \varepsilon_{i12}\,\dot{\varphi}$$

$$\vec{\omega}_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

analoge Rechnung für ϑ und ψ:

$$\vec{\omega}_\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{\omega}_\vartheta = \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D_\vartheta \, \vec{\omega}_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\vartheta \, \dot{\varphi} \\ \cos\vartheta \, \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

$$D_\psi \, D_\vartheta \, \vec{\omega}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\vartheta \, \dot{\varphi} \\ \cos\vartheta \, \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} +\sin\psi \sin\vartheta \, \dot{\varphi} \\ +\cos\psi \sin\vartheta \, \dot{\varphi} \\ \cos\vartheta \, \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

$$D_\psi \, \vec{\omega}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\psi \, \dot{\vartheta} \\ -\sin\psi \, \dot{\vartheta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \cos\psi \, \dot{\vartheta} + \sin\psi \sin\vartheta \, \dot{\varphi} \\ -\sin\psi \, \dot{\vartheta} + \cos\psi \sin\vartheta \, \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} + \cos\vartheta \, \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

6/ 29) Nichtinertialsysteme & Lagrangefkt.

Inertialsystem IS: Ursprung O, $\{\vec{e}_i\}$
"Körper-"system KS: Ursprung O', $\{\vec{e}_i{}'\}$
geht durch zeitabhängige Rotation und Verschiebung aus IS hervor

a) $\vec{e}_i{}'(t) = D_{ij}(t)\,\vec{e}_j$

$\dot{\vec{e}}_i{}'(t) = \dot{D}_{ij}(t)\,\vec{e}_j$

$= \dot{D}_{ij}(t)\,D^T_{jk}(t)\,\vec{e}_k{}'(t)$

Def. $\Omega(t) := \dot{D}(t)\,D^T(t)$

$\Omega^T(t) = \left(\dot{D}(t)D^T(t)\right)^T = D(t)\,\dot{D}^T(t)$

Benutze $\frac{d}{dt}\left(D(t)D^T(t)\right) = \dot{D}(t)D^T(t) + D(t)\dot{D}^T(t)$

$= \frac{d}{dt}\mathbb{1} = 0$

$\Rightarrow \Omega^T(t) = -\dot{D}(t)D^T(t) = -\Omega(t)$

Def. $\vec{\omega}(t) = \omega_k(t)\,\vec{e}_k{}'(t)$

und $\Omega_{ij}(t) = \varepsilon_{ijk}\,\omega_k(t)$

$\Rightarrow \dot{\vec{e}}_i{}'(t) = \Omega_{ik}(t)\,\vec{e}_k{}'(t)$

$= \varepsilon_{ikl}\,\omega_l(t)\,\vec{e}_k{}'$

ONS: $\vec{e}_i{}' \times \vec{e}_l{}' = \varepsilon_{ilk}\,\vec{e}_k{}'$

$\Rightarrow \dot{\vec{e}}_i{}'(t) = -\omega_l(t)\,\vec{e}_i{}' \times \vec{e}_l{}' = -\vec{e}_i{}' \times \vec{\omega}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{e}_i{}'$

7/ ω_k aus Ω_{ij}:

$$\varepsilon_{lij}\,\Omega_{ij} = \varepsilon_{lij}\,\varepsilon_{ijk}\,\omega_k(t)$$
$$= \varepsilon_{ijl}\,\varepsilon_{ijk}\,\omega_k(t)$$
$$= (\delta_{jj}\,\delta_{lk} - \delta_{jl}\,\delta_{jk})\,\omega_k(t)$$
$$= (3\cdot\delta_{lk} - \delta_{lk})\,\omega_k(t)$$
$$= 2\,\omega_l(t)$$

$$\Rightarrow \omega_l = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{lij}\,\Omega_{ij}$$

b) P bewegt sich, also auch $\vec{r}$

Zusammenhang $\vec{r}$ mit $\vec{r}\,'$ über $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,'$

$$\to \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}\,'$$

$$\hookrightarrow \dot{\vec{r}}\,' = \frac{d}{dt}(\vec{r}\,') = \dot{r}_i'\,\vec{e}_i\,'(t) + r_i'\,\dot{\vec{e}}_i\,'(t)$$
$$= \dot{r}_i'\,\vec{e}_i\,'(t) + r_i'\,\vec{\omega}(t)\times\vec{e}_i\,'$$
$$= \vec{v}\,' + \vec{\omega}\times\vec{r}\,'$$

$$\to \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \vec{v}\,' + \vec{\omega}\times\vec{r}\,'$$

$$\to \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} + \underbrace{\frac{d}{dt}(\dot{r}_i'\,\vec{e}_i\,')}_{= \ddot{r}_i'\,\vec{e}_i\,' + \dot{r}_i'\,\vec{\omega}\times\vec{e}_i\,' = \vec{b}\,' + \vec{\omega}\times\vec{v}\,'} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}\,' + \vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}\,'$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} + \vec{b}\,' + 2\vec{\omega}\times\vec{v}\,' + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}\,' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')$$

c) $L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r})$

ausgedrückt in KS'-Koordinaten:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{\vec{R}} + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'\right)^2 - U(\vec{R} + \vec{r}')$$

$$= \frac{m}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \frac{m}{2}\vec{v}'^2 + \frac{m}{2}(\vec{\omega} \times \vec{r}')^2$$

$$+ m\,\dot{\vec{R}} \cdot \vec{v}' + m\,\dot{\vec{R}} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}') + m\vec{v}' \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

$$- \hat{U}(\vec{r}')$$

totale Zeitabl: $\frac{d}{dt}(\dot{\vec{R}} \cdot \vec{r}')$

$$= \ddot{\vec{R}} \cdot \vec{r}' + \dot{\vec{R}} \cdot \vec{v}' + \dot{\vec{R}}(\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

$$\Rightarrow L = \frac{m}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \frac{m}{2}\vec{v}'^2 + \frac{m}{2}(\vec{\omega} \times \vec{r}')^2 - m\ddot{\vec{R}} \cdot \vec{r}' + m\vec{v}'(\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

$$- \hat{U}(\vec{r}')$$

d) ELG: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i'} - \frac{\partial L}{\partial r_i'} = 0$

dazu L in Komponenten:
$\leftarrow$ in KS-Basis

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{R}_i^2 + v_i'^2 + (\varepsilon_{ijk}\,\omega_j r_k')^2 - 2\ddot{\vec{R}} r_i' \vec{e}_i' + 2\varepsilon_{ijk}\, v_i' \omega_j r_k'\right)$$

$$- \hat{U}(\vec{r}') \qquad \left(\text{benutze } \vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j' = \delta_{ij}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_i'} = m v_i' + m\,\varepsilon_{ijk}\,\omega_j r_k'$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i'} = m\, b_i' + m\,\varepsilon_{ijk}\,\omega_j v_k'$$

$$+ m\,\varepsilon_{ijk}\,\dot{\omega}_j r_k'$$

(keine zusätzlichen Terme hier, da Abl. von Komp., nicht von Vektoren ☺)

$$\frac{\partial L}{\partial r_i'} = m\varepsilon_{ljk}\,\omega_j r_k'\,\varepsilon_{lmi}\,\omega_m - m\ddot{\vec{R}}\cdot\vec{e}_i{}'$$

$$+ m\,\varepsilon_{ljk}\,v_l'\,\omega_j - \frac{\partial U}{\partial r_i'}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i'} - \frac{\partial L}{\partial r_i'}$$

$$= m\big(b_i' + \varepsilon_{ijk}\,\omega_j v_k' + \varepsilon_{ijk}\,\dot\omega_j r_k'$$

$$- \varepsilon_{ljk}\,\omega_j r_k'\,\varepsilon_{ilm}\,\omega_m$$

$$+ \ddot{\vec{R}}\cdot\vec{e}_i{}' - \varepsilon_{ilj}\,v_l'\,\omega_j\big) + \frac{\partial U}{\partial r_i'}$$

$$= m\big(b_i' + 2\,\varepsilon_{ijk}\,\omega_j v_k' + \varepsilon_{ijk}\,\dot\omega_j r_k' + \ddot{\vec{R}}\cdot\vec{e}_i{}'$$

$$+ \varepsilon_{iml}\,\omega_m\,\varepsilon_{ljk}\,\omega_j r_k'\big) + \frac{\partial U}{\partial r_i'}$$

$$= 0$$

$$m\,\vec{b}\,' = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}\,'} - m\big(2\vec\omega\times\vec v\,' + \dot{\vec\omega}\times\vec r\,' + \underbrace{\ddot{\vec R}}_{=(\ddot{\vec R}\cdot\vec e_i{}')\vec e_i{}'}$$

$$+ \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r\,')\big)$$

⌐ $L = L(\vec r\,', \vec v\,')$ falsch, da

$$\frac{d}{dt}(\vec r\,') = \vec v\,' + \vec\omega\times\vec r\,' \neq \vec v\,'$$

also L nicht vom Typ $L(\vec r, \dot{\vec r})$ ⌟