

Klassische Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 12

Abgabe: Fr, 04.07.14

Besprechung: Di, 08.07.14

Quiz 3 am 01.07.: erlaubtes Hilfsmittel: 1 einseitig beschriebenes DIN A5 Blatt

Falls noch nicht gemacht: bitte für die Vorleistung in QISPOS anmelden!

Aufgabe 30: Tensoren im euklidischen 3-dimensionalen Raum

(1+1+2+2+1+2=9 Punkte)

Ein Tensor $\mathbf{A}$ mit 3^N Komponenten $A_{i_1 i_2 \dots i_N}$ ($i_1, \dots, i_N = 1, 2, 3$) ist eine Verallgemeinerung des Vektors $\vec{A}$ ($N = 1$) mit Komponenten A_i bezüglich einer kartesischen Koordinatenbasis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ mit $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ (euklidische Metrik). Für Tensoren N -ter Stufe wird das folgende Transformationsverhalten bei Basiswechsel mit einer orthogonalen Transformation α (eigentliche Drehungen oder Spiegelungen mit Matrixelementen α_{ij}) gefordert:

$$A'_{i_1 i_2 \dots i_N} = \sum_{j_1=1}^3 \cdots \sum_{j_N=1}^3 \alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \cdots \alpha_{i_N j_N} A_{j_1 j_2 \dots j_N}, \quad i_k \in \{1, 2, 3\}, \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, N.$$

Eine invariante Größe A ohne Index ($N = 0$) heißt Skalar: $A' = A$. Ein Vektor $\vec{A}$ (gegeben durch seine Komponenten A_i) wird als Tensor 1. Stufe betrachtet: $A'_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} A_j$.

Man vereinbart, beim Auftreten eines Indexpaares jeweils über 1,2,3 zu summieren, d.h. man braucht im Transformationsgesetz oben und in der letzten Gleichung keine Summenzeichen mehr zu schreiben (Einsteinsche Summenkonvention).

Rechenoperationen:

- Tensoren können mit Zahlen multipliziert werden. Tensoren gleicher Stufe und mit gleichem Indexsatz können addiert werden: $aA_{i_1 \dots i_N} + bB_{i_1 \dots i_N}$
 - Bei der Tensormultiplikation von $\mathbf{A}$ der Stufe N und $\mathbf{B}$ der Stufe M ergibt sich ein Tensor $\mathbf{C}$ der Stufe $N + M$: $C_{i_1 \dots i_N j_1 \dots j_M} = A_{i_1 \dots i_N} B_{j_1 \dots j_M}$
- (a) Zeigen Sie, dass beim Basiswechsel $\vec{e}'_i = \alpha_{ij} \vec{e}_j$ für einen Vektor $\vec{A}$ mit Komponenten A_i die neuen Komponenten $A'_i = \alpha_{ij} A_j$ ergeben. Also ist ein Vektor ein Tensor 1. Stufe.
- (b) Zeigen Sie, dass die euklidische Metrik δ_{ij} ein invarianter, symmetrischer Tensor 2. Stufe ist.: $\delta'_{ij} = \delta_{ij}$. Verifizieren Sie, dass in Matrixnotation gilt: $\alpha \delta \alpha^T = \delta$.

- (c) Zeigen Sie, dass $T_{i_1 \dots i_N} \delta_{i_j i_k}$ ($j, k \in \{1, \dots, N\}, j \neq k$) ein Tensor der Stufe $N - 2$ ist, falls $\mathbf{T}$ ein Tensor der Stufe N ist. Solch eine Kontraktion eines Indexpaares mit dem δ -Tensor ist also mit dem Tensorgesetz verträglich und reduziert die Stufe um zwei Einheiten. Insbesondere ist das Skalarprodukt von Vektoren ein Skalar: $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_i w_j \delta_{ij}$.
- (d) Behandeln Sie das schon bekannte ϵ_{ijk} -Symbol (Levi-Civita-Tensor) als einen total antisymmetrischen Tensor 3. Stufe. Zeigen Sie, dass gilt: $\epsilon'_{ijk} = \det(\alpha) \epsilon_{ijk}$. D.h., unter eigentlichen Drehungen α ist dieser Tensor invariant, aber unter Spiegelungen gilt $\epsilon'_{ijk} = -\epsilon_{ijk}$. Um Invarianz zu erhalten, behandelt man ϵ_{ijk} als Pseudotensor 3. Stufe. Folgern Sie daraus das Transformationsverhalten für einen allgemeinen Pseudotensor der Stufe N .
Hinweis: Verwenden Sie die Definition von $\det(\alpha) := \epsilon_{ijk} \alpha_{1i} \alpha_{2j} \alpha_{3k}$. Betrachten Sie ϵ'_{123} , danach z.B. ϵ'_{213} und verallgemeinern Sie die beiden Resultate für ϵ'_{ijk} .
- (e) Zeigen Sie, dass aus $C_i = A_{ij} B_j$ folgt, dass $\mathbf{A}$ ein Tensor 2. Stufe ist, falls $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ Tensoren 1. Stufe sind.
- (f) Zeigen Sie, dass der Trägheitstensor $\Theta_{ik} = \sum_{n=1}^N m_n (\vec{r}_n^2 \delta_{ik} - (x_n)_i (x_n)_k)$ ein symmetrischer Tensor 2. Stufe ist. Folgern Sie dann aus der Tensoreigenschaft des Trägheitstensors die Invarianz der Rotationsenergie $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \Theta_{ij} \omega_i \omega_j$ unter Drehungen des Koordinatensystems.

Aufgabe 31: Satz von Steiner

(3 Punkte)

Ein starrer Körper der Gesamtmasse M (beliebige inhomogene Massenverteilung) mit Schwerpunkt im Koordinatenursprung hat das Trägheitsmoment Θ .

Zeigen Sie: Bei Verschiebung des Koordinatensystems um einen Vektor $\vec{a}$ ist das Trägheitsmoment gegeben durch

$$\Theta_a = \Theta + M (\vec{a}^2 \mathbb{1} - \vec{a} \vec{a}^T) .$$

Dieser Zusammenhang ist unter dem Namen *Satz von Steiner* bekannt, und dient dazu, Trägheitsmomente um Achsen auszurechnen, die nicht durch den Schwerpunkt des Körpers verlaufen.

Aufgabe 32: Trägheitsmomente

(4+4=8 Punkte)

Ein homogener Kreiszylinder besitzt endliche Wandstärke mit Außenradius R_2 , Innenradius $R_1 < R_2$ und Höhe H bei gegebener Masse M . Sein Schwerpunkt liegt im Koordinatenursprung, die Symmetrieachse ist die z -Achse.

- (a) Berechnen Sie die Trägheitsmomente bezüglich der Rotation um die Koordinatenachsen.
- (b) Vergleichen Sie die Grenzfälle eines Hohlzylinders mit verschwindender Wandstärke, eines Vollzylinders und einer Stange infinitesimalen Querschnitts mit jeweils derselben Masse und Höhe. Interpretieren und diskutieren Sie das Ergebnis.