

7

$$30) \quad \vec{e}_i' = \alpha_{ij} \vec{e}_j \Rightarrow \vec{e}_i = (\alpha^T)_{ij} \vec{e}_j'$$

$$\begin{aligned} a) \quad \vec{A} &= A_i \vec{e}_i = A_i (\alpha^T)_{ij} \vec{e}_j' \\ &= A_i \alpha_{ji} \vec{e}_j' \\ &= \alpha_{ji} A_i \vec{e}_j' \quad (A_i, \alpha_{ji} \text{ Zahlen} \rightarrow \text{vertauschen}) \\ &= A_j' \vec{e}_j' \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_j' = \alpha_{ji} A_i \quad \text{erfüllt Transformationsgleichung}$$

→ Tensor 1. Stufe

$$\begin{aligned} b) \quad \delta_{ij}' &= \alpha_{ik} \alpha_{jl} \delta_{kl} \\ &= \alpha_{ik} \alpha_{jk} = \alpha_{ik} (\alpha^T)_{kj} \\ &= \underbrace{(\alpha \alpha^T)}_{= \mathbb{I}}_{ij} = \delta_{ij} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \delta_{ij} = \alpha_{ik} \delta_{kl} (\alpha^T)_{lj}$$

$$\text{oder in Matrixschreibweise: } \delta = \alpha \delta \alpha^T$$

$$\begin{aligned} c) \quad (T_{i_1 \dots i_n} \delta_{i_{n+1} i_{n+2}})' &= T_{i_1 \dots i_n} \delta_{i_{n+1} i_{n+2}} \\ &= \alpha_{i_1 j_1} \dots \alpha_{i_n j_n} T_{j_1 \dots j_n} \delta_{i_{n+1} i_{n+2}} \\ &= \alpha_{i_1 j_1} \dots \alpha_{i_n j_n} \underbrace{\alpha_{i_{n+1} j_{n+1}} \alpha_{i_{n+2} j_{n+2}}}_{= \delta_{i_{n+1} i_{n+2}}} \delta_{i_{n+1} i_{n+2}} T_{j_1 \dots j_n} \\ &= \alpha_{i_1 j_1} \dots \alpha_{i_n j_n} T_{j_1 \dots j_n} \delta_{i_{n+1} i_{n+2}} \\ &= \alpha_{i_1 j_1} \dots \alpha_{i_n j_n} T_{j_1 \dots j_n} \delta_{i_{n+1} i_{n+2}} \end{aligned}$$

2/ $\Rightarrow$ transformiert sich wie Tensor der Stufe $(N-2)$

Skalarprodukt: Def. $A_{ij} := v_i w_j$

$$(v_i w_j \delta_{ij})' = A_{ij}' \delta_{ij} = A_{ij} \delta_{ij} = v_i w_j \delta_{ij}$$

$\rightarrow$ Tensor 0. Stufe (Skalar)

d) Pseudotensor 3. Stufe

$$\epsilon'_{ijk} = \alpha_{ie} \alpha_{jm} \alpha_{kn} \epsilon_{lmn}$$

Betrachte zunächst

$$\begin{aligned} \epsilon'_{123} &= \alpha_{1e} \alpha_{2m} \alpha_{3n} \epsilon_{lmn} \\ &= \det(\alpha) = \det(\alpha) \underbrace{\epsilon_{123}}_{=+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon'_{213} &= \alpha_{2e} \alpha_{1m} \alpha_{3n} \epsilon_{lmn} \\ &= \alpha_{1m} \alpha_{2e} \alpha_{3n} (-\epsilon_{men}) \\ &= -\det(\alpha) = \det(\alpha) \underbrace{\epsilon_{213}}_{=-1} \end{aligned}$$

selbe Symmetrieeigenschaften wie ϵ -Symbol

$$\text{also } \epsilon'_{ijk} = \det(\alpha) \epsilon_{ijk}$$

$\Rightarrow$ Transformationsverhalten für Pseudotensor der Stufe N :

$$P'_{i_1 \dots i_N} = \det(\alpha) \alpha_{i_1 j_1} \dots \alpha_{i_N j_N} P_{j_1 \dots j_N}$$

Bsp: Drehimpuls $\vec{L} = \underbrace{\vec{r}}_{\text{Vektor}} \times \underbrace{\vec{p}}_{\text{Vektor}}, \quad L_i = \epsilon_{ijk} r_j p_k$

3/

e) $C_i = A_{ij} B_j$

B, C Tensoren 1. Stufe

$$C'_i = \alpha_{ik} C_k = \alpha_{ik} A_{kj} B_j$$

$$= \alpha_{ik} A_{kj} (\alpha^T)_{je} B'_e \quad / \text{mit } B'_e = \alpha_{ej} B_j$$

$$= \underbrace{\alpha_{ik} \alpha_{ej} A_{kj}}_{= A'_{ie}} B'_e$$

$\Rightarrow A$ transformiert wie Tensor 2. Stufe.

f) $\theta_{ik} = \sum_{n=1}^N m_n (\vec{r}_n^2 \delta_{ik} - (x_n)_i (x_n)_k)$

symmetrisch $\theta_{ik} = \theta_{ki}$, direkt ablesbar

$$\theta'_{ik} = \sum_{n=1}^N m_n \underbrace{(\vec{r}_n^2)}_{\text{Skalar}} \delta'_{ik} - \underbrace{(x'_n)_i}_{= \alpha_{ie} (x_n)_e} (x'_n)_k$$

$$\stackrel{b)}{=} \alpha_{ie} \alpha_{km} \theta_{em}$$

$\Rightarrow$ Tensor 2. Stufe

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \theta_{ij} w_i w_j$$

$$T'_{rot} = \frac{1}{2} \theta'_{ij} w'_i w'_j$$

$$= \frac{1}{2} \alpha_{ik} \alpha_{jl} \alpha_{im} \alpha_{jn} \theta_{kl} w_m w_n$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{(\alpha^T)_{ki} \alpha_{im}}_{\delta_{km}} \underbrace{(\alpha^T)_{lj} \alpha_{jn}}_{\delta_{ln}} \theta_{kl} w_m w_n$$

$$= \frac{1}{2} \theta_{kl} w_k w_l = T_{rot}$$

31) Satz von SteinerBenötige Gl. (4.46): $\Theta_{ik} = \int_V d^3r \rho(\vec{r}) (\vec{r}^2 \delta_{ik} - r_i r_k)$ Neues Koordinatensystem: $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}$

$$\begin{aligned}
 (\Theta_a)_{ik} &= \int_V d^3r \rho(\vec{r}) ((\vec{r} + \vec{a})^2 \delta_{ik} - (\vec{r} + \vec{a})_i (\vec{r} + \vec{a})_k) \\
 &= \int_V d^3r \rho(\vec{r}) \left[\overbrace{\vec{r}^2 \delta_{ik} - r_i r_k}^{\rightarrow \Theta_{ik}} \right.
 \end{aligned}$$

$$\left. + 2 \vec{a} \cdot \vec{r} \delta_{ik} + \vec{a}^2 \delta_{ik} - a_i r_k - a_k r_i - a_i a_k \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{KS-Ursprung} \\ \text{im Schwerpunkt} \\ \Rightarrow \int_V d^3r \rho(\vec{r}) r_i = 0 \end{array} \right| = \underbrace{\Theta_{ik}}_M + \int_V d^3r \rho(\vec{r}) (\vec{a}^2 \delta_{ik} - a_i a_k)$$

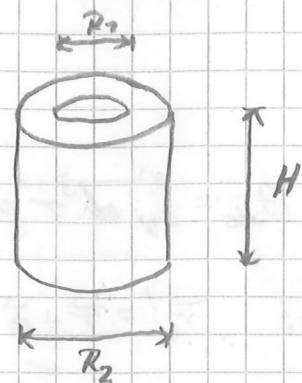
$$= \Theta_{ik} + M (\vec{a}^2 \delta_{ik} - a_i a_k)$$

$$\Rightarrow \Theta_a = \Theta + M (\vec{a}^2 \mathbb{1} - \vec{a} \vec{a}^T)$$

5/

32)

z ↑



$$\text{Masse } M: M = \int_V d^3r \rho(\vec{r}) = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \rho r dr d\varphi dz$$

$$= \rho \cdot 2\pi \cdot H \cdot \int_{R_1}^{R_2} r dr$$

$$= \rho \pi H (R_2^2 - R_1^2) = M$$

a) Symmetrieüberlegungen:

Rotation um z-Achse verändert Objekt nicht

$$\Rightarrow \Theta_{xx} = \Theta_{yy} \quad ; \quad \Theta_{xz} = \Theta_{yz}$$

$$\Theta_{zz} = \int d^3r \rho (x^2 + y^2 + z^2 - r^2)$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} dz \rho r \cdot r^2$$

$$= 2\pi H \rho \frac{1}{4} (R_2^4 - R_1^4)$$

$$= \frac{1}{2} \pi H \rho (R_2^2 - R_1^2) (R_2^2 + R_1^2)$$

$$= \frac{M}{2} (R_1^2 + R_2^2)$$

6/

$$\theta_{xx} = \int d^3r \rho (y^2 + z^2)$$

$$= \iiint dr d\varphi dz \rho r (r^2 \sin^2 \varphi + z^2)$$

$$= \rho \iint dr d\varphi (H r^3 \sin^2 \varphi + r \frac{H^3}{3 \cdot 8} \cdot 2)$$

$$= H \rho \int dr (r^3 [\frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{4} \sin(2\varphi)]_0^{2\pi} + r \frac{H^2}{12} \cdot 2\pi)$$

$$= H \rho \int_{R_1}^{R_2} dr (r^3 \pi + \pi \frac{H^2}{6})$$

$$= H \rho \pi (\frac{1}{4} (R_2^4 - R_1^4) + \frac{H^2}{6 \cdot 2} (R_2^2 - R_1^2))$$

$$= \frac{H \rho \pi}{12} (R_2^2 - R_1^2) (3 R_1^2 + 3 R_2^2 + H^2)$$

$$= \frac{M}{4} (R_1^2 + R_2^2 + \frac{H^2}{3}) = \theta_{yy}$$

$$\theta_{xz} = \int d^3r \rho (-xz)$$

$$= \rho \iiint dr d\varphi dz (-r z \cos \varphi) = 0 \quad (\text{Schwerpunkt in Koord.system - Ursprung})$$

analog für $\theta_{xy} = \theta_{yz} = \theta_{yx} = \theta_{zy} = \theta_{zx} = 0$

$$\theta = M \begin{pmatrix} \frac{1}{4} (R_1^2 + R_2^2 + \frac{H^2}{3}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} (R_1^2 + R_2^2 + \frac{H^2}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} (R_1^2 + R_2^2) \end{pmatrix}$$

7/b) Hohlzylinder mit verschwindender Wandstärke

$$R_1 = R_2 = R$$

$$\Rightarrow \Theta = M \begin{pmatrix} \frac{1}{4} (2R^2 + \frac{H^2}{3}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} (2R^2 + \frac{H^2}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \end{pmatrix}$$

Vollzylinder

$$R_1 = 0; R_2 = R$$

$$\Rightarrow \Theta = M \begin{pmatrix} \frac{1}{4} (R^2 + \frac{H^2}{3}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} (R^2 + \frac{H^2}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} R^2 \end{pmatrix}$$

Stange

$$R_1 = R_2 = 0$$

$$\Rightarrow \Theta = M \begin{pmatrix} \frac{H^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{H^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hohlzylinder vs. Vollzylinder:

Für ersteren ist die Massenverteilung weiter vom Ursprung weg, daher größeres Trägheitsmoment

Bei Stange sitzt gesamte Masse auf z-Achse, also kein Trägheitsmoment bei Drehungen darum.

$$\Theta(\text{Hohlzylinder}) > \Theta(\text{Vollzylinder}) > \Theta(\text{Stange})$$

immer weniger Masse sitzt "außen" bei insgesamt gleicher Gesamtmasse