Klassische Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 13

Abgabe: Fr, 11.07.14
Besprechung: Di, 15.07.14

Aufgabe 33: Kurzfragen – Wiederholung (*1+1+1=3 Punkte*)

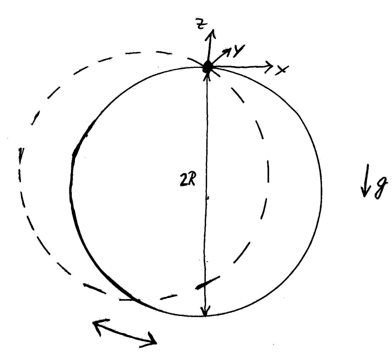
(a) Was sind Zwangsbedingungen? Nennen Sie zwei verschiedene Arten mit zugehöriger Bedingung. Welche Beziehung gilt für die Anzahl der Freiheitsgrade f eines Systems aus N Massenpunkten und N_Z Zwangsbedingungen?

(b) Was versteht man unter einer zyklischen Koordinate?
Zeigen Sie, dass dies direkt auf eine Erhaltungsgröße führt. Wie nennt man diese?

(c) Wie verändern sich die Bewegungsgleichungen, wenn die Lagrange-Funktion L mit einer Konstanten $c \neq 0$ multipliziert wird (mit Rechnung!)?

Aufgabe 34: Hula-Hoop-Reifen (*3+3+3=9 Punkte*)

Ein Hula-Hoop-Reifen ist ein homogener Ring mit Radius R, Masse M und vernachlässigbarer Dicke. Er ist an einem festen Punkt seines Umfangs im homogenen Schwerefeld g der Erde im Koordinatenursprung aufgehängt, es wirken keine weiteren Kräfte. Die Schwingung findet in der x-z-Ebene statt, die der Reifenebene entspricht.



(a) Berechnen Sie, ausgehend von den Ergebnissen von Aufgabe 32, den (vollständigen) Trägheitstensor des Hula-Hoop-Reifens als Hohlzylinder mit vernachlässigbarer Höhe, wenn Sie den Reifen an einem festen Punkt seines Umfangs festhalten. *Teillösung:* $\Theta_{yy} = 2MR^2$.

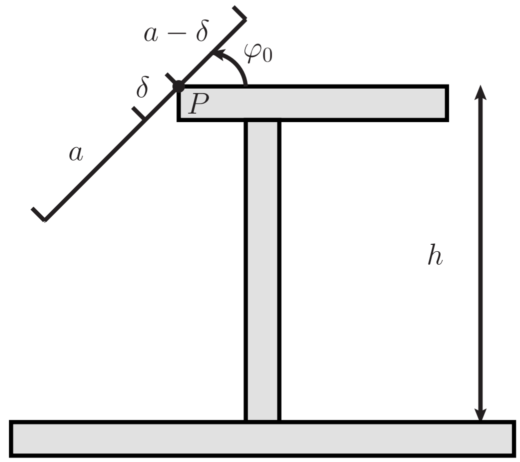
(b) Wie lautet die Lagrangefunktion des Problems?

(c) Lösen Sie das Problem in der Näherung kleiner Auslenkungen mit den Anfangsbedingungen $\varphi(t=0)=0$, $\dot{\varphi}(t=0)=\dot{\varphi}_0$. Was ist die Schwingungsfrequenz um die Gleichgewichtslage?

Aufgabe 35: Murphys Toast (*5+1+0=6 Punkte*)

In dieser Aufgabe untersuchen wir eine Scheibe Toastbrot mit Butter, die von einem Tisch fällt. Laut Murphys Gesetz und alltäglicher Erfahrung fällt diese immer auf die Butterseite. Die Verträglichkeit dieser Erkenntnis mit den Lagrange-Gleichungen soll hier getestet werden.

Eine Toastscheibe kann angenähert als ein Quader mit Länge und Breite (x- und y-Richtung) $2a$, Dicke (z-Richtung) $2b$ und Masse m sowie konstanter Massendichte beschrieben werden. Der Beitrag der Butterauflage ist dabei vernachlässigbar klein.



(a) Berechnen Sie den Trägheitstensor der Toastscheibe bezüglich eines Punktes auf der Unterseite der Scheibe, der um δ in x-Richtung verschoben ist, also um $P=(\delta,0,-b)$, wenn der Koordinatenursprung im Mittelpunkt des Toasts liegt.

(b) Nach einer etwas längeren Rechnung findet man, dass die Toastscheibe, wenn sie den Kontakt mit der Tischplatte in Höhe h über dem Boden verliert, um den Punkt P mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \sqrt{\frac{6g\delta}{a^2+3\delta^2+4b^2}\sin\varphi_0}\,\vec{e}_y$ rotiert. Dabei bezeichnet φ_0 den Startwinkel, also wieviel die Scheibe bereits gekippt ist.
Wie groß ist die Rotationsenergie der Toastscheibe?

(c) *(freiwillig)*
Gleichzeitig fällt die Toastscheibe eine Strecke h (die endliche Ausdehnung kann vernachlässigt werden) frei im Schwerefeld g der Erde nach unten. Berechnen Sie den Auftreffwinkel φ_F.
Für den Startwinkel findet man $\varphi_0 = \frac{\mu_H}{1+36(\frac{\delta}{2a})^2}$ mit dem Haftreibungskoeffizienten $\mu_H = 0,25$.
In welchem Winkel, und damit auf welcher Seite, trifft ein Toastbrot der Größe $2a = 9$ cm, $2b = 1$ cm, $m = 25$ g von einem Tisch $h = 75$ cm auf für $\delta = 1$ cm bzw. $\delta = 0.5$ cm?
Welche Maßnahman können Sie treffen, damit das Toastbrot mit der Butterseite nach oben landet?

Aufgabe 36: Hamilton-Formalismus (*2 Punkte*)

Im letzten Teil der Vorlesung werden Sie den Hamilton-Formalismus kennenlernen. Hierzu wird eine Hamilton-Funktion definiert als

$$H(q,p,t) = \sum_i \dot{q}_i(q,p,t)p_i - L(q,\dot{q}(q,p,t),t)$$

mit den schon bekannten verallgemeinerten Impulsen $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. Die Hamiltonschen (Bewegungs-)Gleichungen lauten dann

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \ .$$

Betrachten Sie einen Massenpunkt (Masse m), der sich reibungsfrei auf einer Schnur senkrecht zu einer Wand bewegen kann und mit dieser über eine Feder (Federkonstante κ) verbunden ist. Es wirken keine weiteren Kräfte.

Finden Sie die allgemeine Lösung für die Auslenkung $x(t)$, indem Sie die oben genannte Hamilton-Funktion und Bewegungsgleichungen benutzen. Vergleichen Sie mit dem bekannten Ergebnis aus dem Lagrange-Formalismus.