

33 a) Einschränkung der Bewegungsfreiheit des Systems

holonom: kann geschrieben werden als

$$A_\mu(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$$

nicht-holonom: nicht durch o.a. Form ausdrückbar,
z.B. geschw. abhängig

skleronom: $\frac{\partial A_\mu}{\partial t} = 0$

rheonom: $\frac{\partial A_\mu}{\partial t} \neq 0$

$$f = 3 \cdot N - N_z$$

b) L unabhängig von q_i ($\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$), wenn q_i zykl. Koord.

Einsetzen in Bew. gl

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{const.} = p_i$$

verallg. Impuls

c) $L' = c \cdot L$

Bew. gl.: $\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L'}{\partial q} = 0$

$$c \cdot \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right)}_{=0} = 0$$

$\Rightarrow$ unverändert

2/ 34a) Hula-Hoop-Reifen

aus Aufgabe 32: Hohlzylinder in y-Richtung
mit $H=0$

$$\Theta = M \begin{pmatrix} \frac{1}{2}R^2 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}R^2 \end{pmatrix}$$

Verschieben des Koordinatenursprungs an den
Rand des Reifens

($\rightarrow$ Aufhängepunkt)

Verschiebung in z-Richtung um R

Benutze Satz von Steiner mit $\vec{a} = R \cdot \vec{e}_z$

$$\Theta' = \Theta + M(\vec{a}^2 \mathbb{1} + \vec{a} \vec{a}^T)$$

$$\Theta'_{ij} = \Theta_{ij} + MR^2 \underbrace{(\delta_{ij} - \delta_{iz} \delta_{jz})}_{= \begin{cases} 1 & \text{für } i=j=x \\ & i=j=y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}}$$

$$\Rightarrow \Theta' = MR^2 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3/

b) Gl. (4.40): $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \Theta_{ik} \omega_i \omega_k$

Rotation nur um y -Achse: $\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_y$

$$\Rightarrow T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \cdot \Theta_{yy} \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \Theta_{yy} \dot{\varphi}^2$$

$$= MR^2 \dot{\varphi}^2$$

$$U = Mg h_{\text{Schwerpunkt}} \quad (*)$$

$$= Mg R (-\cos \varphi)$$

(*) kann Schwerpunkt statt ganzen Reifen betrachten $\rightarrow$ äquivalent



$$L = T_{\text{rot}} - U = \frac{1}{2} \Theta_{yy} \dot{\varphi}^2 + MgR \cos \varphi$$

c) kl. Schwingungen: $\cos \varphi \sim 1 - \frac{\varphi^2}{2}$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} \Theta_{yy} \dot{\varphi}^2 + MgR - \frac{1}{2} MgR \varphi^2$$

Bew.gl.: $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi}$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -MgR \varphi$$

$$0 = \Theta_{yy} \ddot{\varphi} + MgR \varphi \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{MgR}{\Theta_{yy}} \varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{7}{2R} \varphi = 0$$

4/

Ansatz: $\varphi = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{2R}$$

$$\Rightarrow \varphi = A \sin\left(\sqrt{\frac{g}{2R}} t + \varphi_0\right)$$

Anfangsbedingungen:

$$\varphi(t=0) = A \sin \varphi_0 = 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0$$

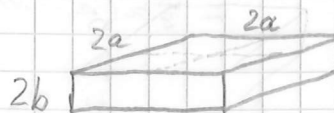
$$\dot{\varphi}(t=0) = A \omega \cos \varphi_0 = A \omega = \dot{\varphi}_0 \Rightarrow A = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega}$$

$$\Rightarrow \text{Lösung: } \varphi = \sqrt{\frac{2R}{g}} \dot{\varphi}_0 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{2R}} t\right)$$

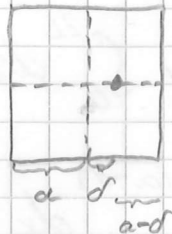
Standard-Sinusschwingung analog math. Pendel
Schwingungsdauer, als ob $(\omega^2 = \frac{g}{l})$
Masse im entferntesten Punkt konzentriert wäre.

5/ 35) Murphys Toast

a) Toastscheibe



von unten:



Trägheitstensor

$$\text{Dichte: } \rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{2a \cdot 2a \cdot 2b} = \frac{m}{8a^2b}$$

$$\Theta_{ik} = \int_{-(a+d)}^{a+d} dx \int_{-a}^a dy \int_0^{2b} dz \rho (x^2 + y^2 + z^2) \delta_{ik} - x_i x_k$$

$$\Theta_{xx} = \int_{-(a+d)}^{a+d} dx \int_{-a}^a dy \int_0^{2b} dz \rho (y^2 + z^2)$$

$$= 2a \cdot \frac{m}{8a^2b} \cdot \left(\int_{-a}^a dy y^2 \cdot 2b + \int_0^{2b} dz z^2 \cdot 2a \right)$$

$$= \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_{-a}^a \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} a^3 = \left[\frac{1}{3} z^3 \right]_0^{2b} = \frac{8b^3}{3}$$

$$= \frac{m}{4ab} \left(\frac{4}{3} a^3 b + \frac{16}{3} ab^3 \right) = \frac{m}{3} (a^2 + (2b)^2)$$

$$\Theta_{yy} = 2a \cdot \frac{m}{8a^2b} \left(2b \cdot \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-(a+d)}^{a+d} + 2a \cdot \left[\frac{1}{3} z^3 \right]_0^{2b} \right)$$

$$= \frac{1}{3} (a-d)^3 + \frac{1}{3} (a+d)^3 = \frac{2}{3} (a^3 + 3ad^2)$$

$$= \frac{8b^3}{3}$$

$$= \frac{m}{4ab} \cdot \left(\frac{4}{3} ab (a^2 + 3d^2) + \frac{16}{3} ab^3 \right)$$

$$= \frac{m}{3} \cdot (a^2 + 3d^2 + (2b)^2)$$

$$\theta_{zz} = 2b \cdot \frac{m}{8a^2b} \cdot \left(2a \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{3}x^3 \right]_{-(a+d)}^{a-d}}_{= \frac{2}{3}a(a^2+3d^2)} + 2a \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{3}y^3 \right]_{-a}^a}_{= \frac{2}{3}a \cdot a^2} \right)$$

$$= \frac{m}{3} (a^2 + 3d^2 + a^2) = \frac{m}{3} (2a^2 + 3d^2)$$

$$\begin{aligned} \theta_{xy} &= - \int_{-(a+d)}^{a-d} dx \int_{-a}^a dy \int_0^{2b} dz \rho \cdot xy \\ &= - \frac{m}{8a^2b} \cdot 2b \cdot \int_{-(a+d)}^{a-d} dx x \cdot \underbrace{\int_{-a}^a dy \cdot y}_{= \left[\frac{1}{2}y^2 \right]_{-a}^a = 0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_{xz} &= - \frac{m}{8a^2b} \cdot 2a \cdot \int_{-(a+d)}^{a-d} dx x \cdot \underbrace{\int_0^{2b} dz \cdot z}_{= \frac{1}{2}(b-d)^2 - (a+d)^2 = 2b^2} \\ &= \frac{1}{2} (b-d)^2 - (a+d)^2 = 2b^2 \\ &= \frac{1}{2} (-2ad \cdot 2) = -2ad \\ &= m \cdot db \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_{yz} &= - \frac{m}{8a^2b} \cdot 2a \int_{-a}^a dy y \cdot \int_0^{2b} dz z \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{m}{3} \begin{pmatrix} a^2 + (2b)^2 & 0 & 3db \\ 0 & a^2 + 3d^2 + (2b)^2 & 0 \\ 3db & 0 & 2a^2 + 3d^2 \end{pmatrix}$$

oder erst um Mittelpunkt berechnen: $\theta^M = \frac{m}{3} \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 0 & a \\ 0 & a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix}$

und mit Satz v. Steiner verschieben: $\vec{a} = (d, 0, -b)$

$$\theta = \theta^M + m \left((d^2 + b^2) \mathbb{1} - \begin{pmatrix} d^2 & 0 & -db \\ 0 & 0 & 0 \\ -db & 0 & b^2 \end{pmatrix} \right)$$

7/

$$b) T_{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \Theta \vec{\omega}$$

$$= \frac{1}{2} |\vec{\omega}|^2 \Theta_{yy}$$

$$= \frac{m}{6} (a^2 + 3d^2 + (2b)^2) \cdot \frac{6gd}{a^2 + 3d^2 + 4b^2} \sin \varphi_0$$

$$= mgd \sin \varphi_0$$

c) Drehung mit konst. Winkelgeschw.:

$$\varphi = |\omega|t + \varphi_0$$

$$\text{Zeit bis Auftreffen: } h = \frac{g}{2} t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\Rightarrow \varphi_F = \sqrt{\frac{6gd}{a^2 + 3d^2 + 4b^2} \cdot \sin \varphi_0 \cdot \frac{2h}{g}} + \varphi_0$$

$$= \sqrt{\frac{12dh \sin \varphi_0}{a^2 + 3d^2 + 4b^2}} + \varphi_0$$

e) Mit $\varphi_0 = \frac{0.25}{1 + 36 \left(\frac{d}{2a}\right)^2}$

$$d = 1 \text{ cm: } \varphi_0 \approx 0.173 \rightarrow \varphi_F \approx 2.70 = 0.86 \pi$$

$$\text{da } \frac{\pi}{2} < \varphi_F < \frac{3\pi}{2} \rightarrow \text{halbe Umdrehung}$$

$$\rightarrow \text{Butterseite}$$

$$d = 0.5 \text{ cm: } \varphi_0 \approx 0.225 \rightarrow \varphi_F \approx 2.36 = 0.75 \pi$$

$$\rightarrow \text{Butterseite}$$

$\Rightarrow$ Toast landet immer auf Butterseite

Lösungen: * höherer Tisch: $h = 300 \text{ cm: } d = 1 \text{ cm: } \varphi_F = 1.66 \pi$

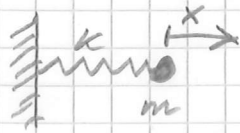
* kleinerer Toast: $2a = 2 \text{ cm: } 2b = 0.1 \text{ cm: } d = 0.2 \text{ cm: } \varphi_F = 1.78 \pi$

(* Toast mit Butterseite nach unten auf

Tisch ablegen (erschwert auch initiales Rutschen))

$\Rightarrow$ Toast landet immer auf Butterseite für handelsübliche Toastscheiben und Tischhöhen.

8

Hamilton-Formalismus

$$U = \frac{k}{2} x^2$$

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2$$

Lagrange-Formalismus:

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} x$$

$$\Rightarrow \text{Schwingung: } x(t) = A \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_0\right)$$

Hamilton-Formalismus:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$H(x, p, t) = \dot{x} \cdot (m\dot{x}) - \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2 \right)$$

$$= \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{k}{2} x^2 \quad (= T + U)$$

$$= \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} x^2$$

Bew. gl.:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

$$\Rightarrow p = m\dot{x}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx$$

$$\downarrow \\ = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\frac{k}{m} x \quad \text{selbe Bew. gl. wie Lagrange-Fall}$$

$$\Rightarrow x(t) = A \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_0\right)$$