Klassische Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Quiz 2 – Block 1

Rechnen: Di, 10.06.14
Besprechung: Di, 17.06.14

Aufgabe 1: Geodäte auf Torus (*3+7+8+2=20 Bonuspunkte*)

In dieser Aufgabe betrachten wir einen Torus. Dieser lässt sich als Rotationsobjekt konstruieren, indem man einen Kreis mit Radius r auf einer zweiten Kreisbahn mit Radius $R > r$ um die z-Achse rotieren lässt. Es ergibt sich ein Objekt mit Loch in der Mitte, das die Form eines Rettungsrings oder Donuts hat.
Die Oberfläche des Torus lässt sich folgendermaßen parametrisieren

$$\begin{aligned} x &= (R + r\cos\varphi)\cos\vartheta \\ y &= (R + r\cos\varphi)\sin\vartheta \\ z &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

mit den beiden Parametern ϑ und φ sowie festem R und r.
Gesucht ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei beliebigen Punkten auf dem Torus, eine sogenannte Geodäte.

(a) Berechnen Sie die infinitesimalen Elemente $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ mittels $\mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial\vartheta}\mathrm{d}\vartheta + \frac{\partial x}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi$, etc.

(b) Zeigen Sie dann, dass sich das Wegelement $\mathrm{d}s$ für den Torus schreiben lässt als $\mathrm{d}s = \sqrt{(R + r\cos\varphi)^2(\mathrm{d}\vartheta)^2 + r^2(\mathrm{d}\varphi)^2}$,
und stellen Sie die Gleichung für die Länge L zwischen Startpunkt S und Endpunkt E auf.

(c) Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für die dazugehörige Funktion $F(\vartheta, \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\varphi}, \varphi)$ auf. Integrieren Sie diese einmal, die dabei auftretende Integrationskonstante kann einfach mit c bezeichnet werden.
Lösung: $\vartheta' = \pm cr(A^4 - c^2A^2)^{-\frac{1}{2}}$ *mit* $A = R + r\cos\varphi$

(d) Bestimmen Sie daraus eine Integralgleichung für ϑ der Form
$\vartheta - \vartheta_S = \int \mathrm{d}\varphi f(\varphi)$.
Das Integral auf der rechten Seite soll hier nicht gelöst werden!