Klassische Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Quiz 2 – Block 2

Rechnen: Di, 10.06.14

Besprechung: Di, 17.06.14

Aufgabe 1: Geodäte auf Hyperboloid

(3+7+8+2=20 Bonuspunkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir ein (Einheits-)Hyperboloid. Dieses lässt sich als Rotationsobjekt konstruieren, indem man eine Hyperbel, also ein Objekt mit Gleichung $x^2 - z^2 = 1$ um die z -Achse rotieren lässt. Die Oberfläche des Hyperboloids ist dann über die Bedingung $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ gegeben.

Die Oberfläche des Einheits-Hyperboloids lässt sich folgendermaßen parametrisieren

$$x = \cosh u \cos \varphi \qquad y = \cosh u \sin \varphi \qquad z = \sinh u$$

mit den beiden Parametern u und φ .

Gesucht ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei beliebigen Punkten auf dem Hyperboloid, eine sogenannte Geodäte.

- Berechnen Sie die infinitesimalen Elemente dx , dy , dz mittels $dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi$, etc.
- Zeigen Sie dann, dass sich das Wegelement ds für das Hyperboloid schreiben lässt als $ds = \sqrt{(\sinh^2 u + \cosh^2 u)(du)^2 + \cosh^2 u(d\varphi)^2}$, und stellen Sie die Gleichung für die Länge L zwischen Startpunkt S und Endpunkt E auf.
- Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für die dazugehörige Funktion $F(\varphi, \frac{d\varphi}{du}, u)$ auf. Integrieren Sie diese einmal, die dabei auftretende Integrationskonstante kann einfach mit c bezeichnet werden.

$$\text{Lösung: } \varphi' = \pm \frac{c\sqrt{\sinh^2 u + \cosh^2 u}}{\cosh u} \sqrt{\frac{1}{1-c^2}}$$

- Bestimmen Sie daraus eine Integralgleichung für φ der Form $\varphi - \varphi_S = \int du f(u)$.
Das Integral auf der rechten Seite soll hier nicht gelöst werden!

Nützliche Formeln für die Hyperbelfunktionen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \cosh x &= \sinh x & \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\ \frac{d}{dx} \sinh x &= \cosh x & \cosh x \in [1; \infty[&; \quad \sinh x \in] - \infty; \infty[\end{aligned}$$