Klassische Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 3

Abgabe: **Do**, 30.04.15
Besprechung: Di, 05.05.15

Aufgabe 6: Eigenwerte und Eigenvektoren (*4+4=8 Punkte*)

Gegeben sei die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 8 \\ 2 & -2 & 10 \\ 8 & 10 & -5 \end{pmatrix} .$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte dieser Matrix, indem Sie die Lösungen λ des sogenannten charakteristischen Polynoms $\det(M - \lambda \mathbb{1}) = 0$ bestimmen. Dabei bezeichnet $\mathbb{1}$ die Einheitsmatrix.
Hinweis: Eine der Lösungen ist $\lambda = 9$.

(b) Bestimmen Sie den normierten Eigenvektor $\vec{v}$ zum Eigenwert $\lambda = 9$. Eigenvektoren sind diejenigen Vektoren, welche die Gleichung $M\vec{v} = \lambda\vec{v}$ erfüllen.

Aufgabe 7: Taylorentwicklung in mehreren Variablen (*4 Punkte*)

Gegeben sei eine reellwertige Funktion $f(\vec{x})$, die von einem n-komponentigen Vektor von Variablen $\vec{x}$ abhängt. Wir wollen hier nur den Fall $n = 3$ mit kartesischen Koordinaten betrachten, die Verallgemeinerung für beliebige n ist aber einfach möglich.
$f(\vec{x} + \vec{a})$ mit einem konstanten Vektor $\vec{a}$ kann unter gewissen Anforderungen an f durch eine Taylorreihe dargestellt werden. Die ersten Summanden der Taylorreihe sind

$$f(\vec{x} + \vec{a}) = f(\vec{x}) + \vec{a} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{x}) + \frac{1}{2!} \left(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}\right)^2 f(\vec{x}) + \dots \ ,$$

mit

$$\left(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}\right)^2 := \left(\sum_{i=1}^{3} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_i a_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \ .$$

Berechnen Sie für $f(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|}$ die oben angegebenen ersten drei Terme der Taylorentwicklung von $f(\vec{x} + \vec{a})$.

Aufgabe 8: Rollpendel (*5+1+2=8 Punkte*)

Im Schwerefeld der Erde ist eine Masse m_1 auf die horizontale x-Achse fixiert, kann sich auf dieser aber frei und ohne Reibung bewegen. An dieser befestigt ist eine Stange der Länge l, an derem anderen Ende sich eine zweite Masse m_2 befindet. Diese kann sich ansonsten frei bewegen, insbesondere auch in y-Richtung.

(a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion dieses Systems auf. Finden Sie dazu geeignete generalisierte Koordinaten, die die Zwangsbedingungen automatisch berücksichtigen.

(b) Gibt es zyklische Koordinaten? Falls ja, was sind die erhaltenen verallgemeinerten Impulse?

(c) Leiten Sie für eine der übrigen Koordinaten die Bewegungsgleichung her.