KIT **SS 2015**

Klassische Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 4

Abgabe: Fr, 08.05.15
Besprechung: Di, 12.05.15

Aufgabe 8: Eigenvektoren – Teil 2 (*3+3=6 Punkte*)

Wir betrachten nochmal die Matrix M aus Aufgabe 6:

$$M = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 8 \\ 2 & -2 & 10 \\ 8 & 10 & -5 \end{pmatrix} .$$

Dort hatten wir gefunden, dass die Eigenwerte $\lambda_{1,2,3} = 9, -9, -18$ sind, sowie einen Eigenvektor $\vec{v}_1 = (1, 2, 2)^T$ berechnet.

(a) Finden Sie Eigenvektoren zu den anderen beiden Eigenwerten.
Der letzte Eigenvektor lässt sich auf zwei verschiedene Arten finden. Rechnen Sie beide Wege nach.

(b) Aus den **normierten** Eigenvektoren lässt sich eine Matrix $U = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ bilden. Berechnen Sie ihre Determinante. Zeigen Sie, dass U orthogonal ist. Außerdem diagonalisiert sie M via $M_D = U^T M U$. Wie sieht M_D aus? Welche Einträge stehen auf der Diagonalen?
(Alle Rechnungen mit den aus M folgenden Werten, nicht allgemein.)

Aufgabe 9: Das mathematische Pendel (*1+2+2=5 Punkte*)

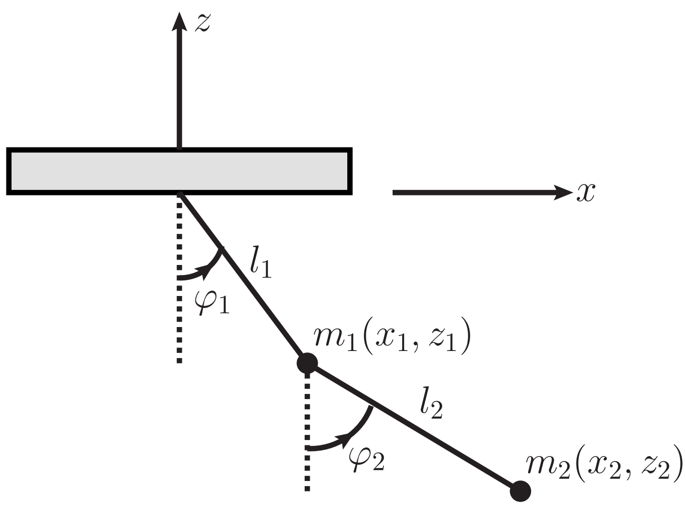
Ein Massenpunkt m ist an einem masselosen Stab der Länge l befestigt und schwingt in einer Ebene um seine Ruhelage im homogenen Schwerefeld der Erde. Es wirken keine weiteren Kräfte.

(a) Formulieren Sie die Lagrangefunktion des Pendels. Welches ist die geeignete verallgemeinerte Koordinate?

(b) Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung auf.

(c) Wie lautet die Lösung für kleine Pendelausschläge bei beliebiger Anfangsbedingung $\varphi(t_0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(t_0) = \dot{\varphi}_0$?

Aufgabe 10: Ebenes mathematisches Doppelpendel – Teil 1 (*2+2+2+3=9 Punkte*)



Betrachten Sie in einer Ebene das skizzierte Doppelpendel (masselos gedachte Fäden der Länge l_1 und l_2, Massenpunkte m_1 und m_2) im homogenen Schwerefeld (g) der Erde.

(a) Welches sind die Zwangsbedingungen A_μ, $\mu = 1, 2, \ldots, N_Z$? Wie groß ist also f, die Zahl der Freiheitsgrade? Von welchem Typ sind die Zwangsbedingungen?

(b) Bestimmen Sie die Kräfte $\vec{F}_i$ und die Zwangskräfte $\vec{Z}_i$ für $i = 1, 2$.

(c) Wie sehen die Lagrange-Gleichungen 1. Art aus?
(Diese Gleichungen sollen hier nicht gelöst werden.)

(d) Wieso sollte hier die Energie E erhalten sein? Schreiben Sie E für das Doppelpendel auf und testen Sie die Erhaltung, indem Sie $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$ explizit berechnen. Verwenden Sie dabei die oben gefundenen Gleichungen aus Teil (c) und (a).