Klassische Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 10

Abgabe: Fr, 19.06.15
Besprechung: Di, 23.06.15

Aufgabe 22: Eichtransformationen der Lagrange-Funktion (*2 Punkte*)

Unter einer Eichtransformation eines Feldes F versteht man allgemein eine Abbildung $F \to F'$, welche seine Bewegungsgleichungen nicht ändert.
Die Lagrange-Funktion L eines Teilchens werde durch die folgende Eichtransformation modifiziert:

$$L'(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} G(\vec{q}, t) \ .$$

Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen für L' gleich zu denen von L sind, indem Sie sie explizit berechnen.

Aufgabe 23: Sattelpunkt der Wirkung (*3+4=7 Punkte*)

Zeigen Sie, dass die Wirkung

$$S = \int_0^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{D}{2} x^2 \right)$$

des harmonischen Oszillators für die Bewegung $x(t) = A \sin(\omega t)$ mit $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ weder minimal noch maximal ist, falls t_2 größer als die halbe Schwingungsdauer T ist.

(a) Betrachten Sie eine Variation der Bahnkurve der Form $\hat{x}(t) = x(t) + \epsilon\eta(t)$, welche an den Endpunkten festgehalten wird: $\eta(0) = \eta(t_2) = 0$. Setzen Sie diese in S ein und integrieren Sie partiell, um $\dot{\eta}$ zu eliminieren. Zeigen Sie, dass der Term proportional zu ϵ verschwindet.
Lösung: $\Delta S = S[\hat{x}] - S[x] = -\frac{\epsilon^2}{2} \int_0^{t_2} \mathrm{d}t \eta (m\ddot{\eta} + D\eta)$

(b) Betrachten Sie nun Abweichungen der Form $\eta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{t_2} t\right)$. Dabei sind $b_k \in \mathbb{R}$ beliebige Konstanten.

Für diese gilt die Orthogonalitätsrelation $\int_0^{t_2} \mathrm{d}t \sin\left(\frac{k\pi}{t_2}t\right) \sin\left(\frac{l\pi}{t_2}t\right) = \frac{t_2}{2}\delta_{kl}$.
Setzen Sie diese Abweichungen nun in ΔS ein. Finden Sie eine Bedingung, dass $\Delta S < 0$ sein kann, und leiten Sie daraus eine Bedingung an t_2 ab. Vergleichen Sie diese mit der Schwingungsdauer des harmonischen Oszillators. Zeigen Sie dann, dass sich auch in diesen Fällen immer Bahnkurven η mit $\Delta S > 0$ finden lassen, und damit S weder minimal noch maximal ist.

Aufgabe 24: Wellengleichung (*2+4=6 Punkte*)

Wir betrachten eine Saite mit Länge l im Ruhezustand und einer konstanten Masse pro Längeneinheit ρ. Diese wird an beiden Enden festgehalten und durch eine Kraft F vorgespannt. Die Auslenkung an der Stelle x zur Zeit t wird mit $y(x,t)$ bezeichnet.

(a) Berechnen Sie die kinetische und potentielle Energie der transversal schwingenden Saite. Die Auslenkungen, durch die die Saite leicht gedehnt wird, seien dabei so klein, dass die Spannkraft F als konstant angenommen werden darf.

(b) Wenden Sie das Hamiltonsche Prinzip an, um daraus die Wellengleichung $\frac{1}{c^2}\ddot{y}^2 = y''^{\,2}$ herzuleiten. Verwenden Sie, dass $y'^{\,2} \ll 1$ ist, um höhere Terme in y' zu vernachlässigen, und integrieren Sie jeweils partiell, um Terme, in denen $\delta y'$ und $\delta \dot{y}$ auftreten, zu eliminieren. Welchen Wert hat die Konstante c?

Aufgabe 25: Teilchen im Zylinderpotential (*3+2=5 Punkte*)

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich in einem Potential, das nur von den Größen $x^2 + y^2$ sowie z (in beliebigen Potenzen) abhängt, $U = U(x^2 + y^2, z)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Transformation

$$\begin{aligned} x &\to x^* = x + \epsilon y \qquad & z &\to z^* = z \\ y &\to y^* = y - \epsilon x \qquad & t &\to t^* = t \end{aligned}$$

die Voraussetzungen des Noether-Theorems erfüllt.

(b) Berechnen Sie die zugehörige Noether-Ladung.
Welcher physikalischen Größe entspricht diese?