KIT **SS 2015**

Klassische Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 13

Abgabe: Fr, 10.07.15
Besprechung: Di, 14.07.15

Anmeldung der Vorleistung in QISPOS nicht vergessen!

Aufgabe 31: Satz von Steiner (*3 Punkte*)

Ein starrer Körper der Gesamtmasse M (beliebige inhomogene Massenverteilung) mit Schwerpunkt im Koordinatenursprung hat das Trägheitsmoment Θ.
($\Theta_{ik} = \int_V \mathrm{d}^3 r \rho(\vec{r})(\vec{r}^2 \delta_{ik} - x_i x_k)$)
Zeigen Sie: Bei Verschiebung des Koordinatensystems um einen Vektor $\vec{a}$ ist das Trägheitsmoment gegeben durch

$$\Theta_a = \Theta + M\left(\vec{a}^{\,2}\mathbb{1} - \vec{a}\vec{a}^{\,T}\right) \ .$$

Dieser Zusammenhang ist unter dem Namen *Satz von Steiner* bekannt, und dient dazu, Trägheitsmomente um Achsen auszurechnen, die nicht durch den Schwerpunkt des Körpers verlaufen.

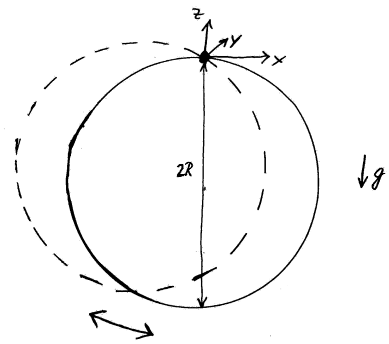
Aufgabe 32: Trägheitsmomente (*4+4=8 Punkte*)

Ein homogener Kreiszylinder besitzt endliche Wandstärke mit Außenradius R_2, Innenradius $R_1 < R_2$ und Höhe H bei gegebener Masse M. Sein Schwerpunkt liegt im Koordinatenursprung, die Symmetrieachse ist die z-Achse.

(a) Berechnen Sie die Trägheitsmomente bezüglich der Rotation um die Koordinatenachsen.

(b) Vergleichen Sie die Grenzfälle eines Hohlzylinders mit verschwindender Wandstärke, eines Vollzylinders und einer Stange infinitesimalen Querschnitts mit jeweils derselben Masse und Höhe. Interpretieren und diskutieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 33: Hula-Hoop-Reifen (*3+3+3=9 Punkte*)



Ein Hula-Hoop-Reifen ist ein homogener Ring mit Radius R, Masse M und vernachlässigbarer Dicke. Er ist an einem festen Punkt seines Umfangs im homogenen Schwerefeld g der Erde im Koordinatenursprung aufgehängt, es wirken keine weiteren Kräfte. Die Schwingung findet in der x-z-Ebene statt, die der Reifenebene entspricht.

(a) Berechnen Sie, ausgehend von den Ergebnissen von Aufgabe 32, den (vollständigen) Trägheitstensor des Hula-Hoop-Reifens als Hohlzylinder mit vernachlässigbarer Höhe, wenn Sie den Reifen an einem festen Punkt seines Umfangs festhalten. *Teillösung:* $\Theta_{yy} = 2MR^2$.

(b) Wie lautet die Lagrangefunktion des Problems?
($T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} \Theta_{ij}\omega_i\omega_j$)

(c) Lösen Sie das Problem in der Näherung kleiner Auslenkungen mit den Anfangsbedingungen $\varphi(t=0) = 0$, $\dot{\varphi}(t=0) = \dot{\varphi}_0$. Was ist die Schwingungsfrequenz um die Gleichgewichtslage?

Aufgabe 34: Kurzfragen (*1+1+1=3 Bonuspunkte*)

(a) Was sind verallgemeinerte Koordinaten? Wie viele gibt es?

(b) Wie verändern sich die Bewegungsgleichungen, wenn die Lagrange-Funktion L mit einer Konstanten $c \neq 0$ multipliziert wird (mit Rechnung!)?

(c) Was besagt das Noether-Theorem (in Worten)?