Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Klassische Theoretische Physik II (Theorie B) **Sommersemester 2016**

Prof. Dr. Alexander Mirlin
PD Dr. Igor Gornyi, Nikolaos Kainaris

Musterlösung: Blatt 3
Besprechung: 10.05.2016

1. Pendel mit zeitabhängiger Aufhängung (4+4+6=14 Punkte)

Betrachten Sie das in Abb. 1 dargestellte mathematische Pendel der Masse m in der x-z Ebene mit konstanter Fadenlänge l und zeitabhängiger Position der Aufhängung $x_s(t)$. Die Gravitationskraft wirkt parallel zur z-Achse.

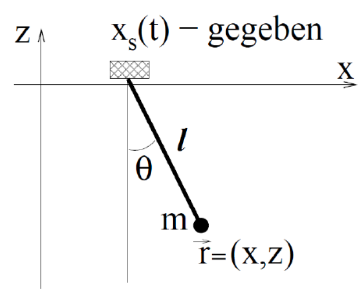


Abb. 1: Pendel mit bewegter Aufhängung.

(a) Bestimmen Sie die Zwangsbedingung für die Koordinaten $x(t)$ und $z(t)$ des Pendels. Schreiben Sie die Lagrange-Gleichungen 1. Art erst in kartesischen Koordinaten und dann in Zylinder-Koordinaten auf.

(b) Eliminieren Sie die Zwangskraft und leiten Sie die Bewegungsgleichung für den kleinen Winkel $\theta \ll 1$ her. Finden Sie dann die Bahnkurve für den Fall, dass $x_s(t) = x_0 \cos(\omega t)$.

(c) Finden Sie nun die Zwangskraft $\vec{Z}$, die auf das Pendel wirkt (vernachlässigen Sie Terme höherer als zweiter Ordnung in θ sowie in Ableitungen von θ).

Lösung:

(a) Die Zwangsbedingung lautet

$$F(\vec{r},t) = (\vec{r} - \vec{r}_s)^2 - l^2 = (x - x_s(t))^2 + z^2 - l^2 = 0$$

Für die Zwangskraft gilt dann

$$\vec{Z} = \lambda \vec{\nabla} F = \lambda [2(x - x_s)\vec{e}_x + 2z\vec{e}_z]$$

Die Lagrange-Gleichungen 1. Art lauten

$$m\ddot{\vec{r}} = -mg\vec{e}_z + \vec{Z} \tag{1}$$

In kartesischen Koordinaten ergibt das

$$m\ddot{x} = 2\lambda(x - x_s(t))$$
$$m\ddot{z} = -mg + 2\lambda z$$

Jetzt benutzen wir Zylinder-Koordinaten:

$$x - x_s(t) = l \sin\theta$$

$$z = -l\cos\theta$$

und differenzieren zweimal. Das ergibt

$$\ddot{x} = \ddot{x}_s(t) + l(\cos\theta\ddot{\theta} - \sin\theta\dot{\theta}^2)$$
$$\ddot{z} = l(\sin\theta\ddot{\theta} + \cos\theta\dot{\theta}^2)$$

Die Lagrange-Gleichungen 1. Art lauten jetzt

$$m\ddot{x} = m\ddot{x}_s(t) + ml(\cos\theta\ddot{\theta} - \sin\theta\dot{\theta}^2) = 2\lambda l \sin\theta \tag{2}$$
$$m\ddot{z} = ml(\sin\theta\ddot{\theta} + \cos\theta\dot{\theta}^2) = -mg - 2\lambda l\cos\theta \tag{3}$$

(b) Wir multiplizieren Gl. (2) mit $\cos\theta$ und Gl. (3) mit $\sin\theta$. Dann addieren wir die Gleichungen. Dies eliminiert λ und ergibt

$$l\ddot{\theta} = -g\sin\theta - \cos\theta\ddot{x}_s(t)$$

Wir betrachten kleine Auslenkungen θ, so dass $\sin\theta \approx \theta$ und $\cos\theta \approx 1$. Dann gilt

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = -\frac{\ddot{x}_s(t)}{l}$$

wobei $\omega_0^2 \equiv g/l$. Für das Beispiel $x_s = x_0\cos\omega t$ gilt dann

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = \frac{x_0}{l}\omega^2\cos\omega t$$

Wir machen einen Ansatz $\theta(t) = a\cos\omega t$. Das ergibt

$$a = \left(\frac{x_0}{l}\right)\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Also

$$\theta(t) = \left(\frac{x_0}{l}\right)\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\omega t \tag{4}$$

Die partikuläre Lösung (4) ist der wichtigste Teil der allgemeinen Lösung, da sie alle Informationen über die bewegte Aufhängung trägt. Die allgemeine Lösung $\theta_{\mathrm{A}}(t)$ ist durch eine Superposition von erzwungener Schwingung $\theta(t)$ und der Eigenschwingung $\theta_{\mathrm{E}}(t) = a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \cos(\omega_0 t)$, gegeben:

$$\theta_{\mathrm{A}}(t) = \frac{x_0}{l} \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t) + \theta_{\mathrm{E}}(t), \qquad \ddot{\theta}_{\mathrm{E}} + \omega_0^2 \theta_{\mathrm{E}} = 0.$$

Die konstanten a_1 und a_2 werden durch die Anfangsbedingungen $\theta_{\mathrm{A}}(t=0)$ und $\dot{\theta}_{\mathrm{A}}(t=0)$ bestimmt.

Ohne äußere Kraft und Dämpfung würde das System mit seiner Eigenfrequenz ω_0 frei schwingen. In der Realität unterliegen alle schwingenden Systeme einer Dämpfung. Bei Dämpfung nähert die Eigenschwingung $\theta_{\mathrm{E}}(t)$ sich Null. Daher gehen alle verschiedenen erzwungenen Schwingungen des gedämpften Systems im Laufe der Zeit in eine einzige über. Die erzwungene Schwingung $\theta(t)$ hat keine "Erinnerung" daran, aus welchen konkreten Anfangsbedingungen heraus sie entstanden ist.

(c) Die Zwangskraft könnte man jetzt aus Gl. (1) bestimmen:

$$\vec{Z} = m\ddot{\vec{r}} + mg\vec{e}_z$$

und $\vec{r} = [(x_s(t) + l\sin\theta)\vec{e}_x - l\cos\theta\vec{e}_z]$. Stattdessen können wir einfach λ bestimmen, da $\vec{Z} = 2\lambda(\vec{r} - \vec{r}_s)$ und $|\vec{Z}| = 2l|\lambda|$.

Aus Gl. (3) leiten wir

$$\lambda = -\frac{m}{2l\cos\theta}\left[l(\sin\theta\ddot{\theta} + \cos\theta\dot{\theta}^2) + g\right]$$

her. Für kleine Auslenkungen ergibt das

$$\lambda \approx -\frac{m}{2l}\left(\frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{2} + \ldots}\right)\left[g + l\theta\ddot{\theta} + l\dot{\theta}^2\right] \approx -\frac{m}{2l}\left(1 + \frac{\theta^2}{2}\right)\left[g + l\theta\ddot{\theta} + l\dot{\theta}^2\right]$$

und

$$\lambda \approx -\frac{m}{2l}\left(g + g\frac{\theta^2}{2} + l\theta\ddot{\theta} + l\dot{\theta}^2\right)$$

(Wir vernachlässigen Potenzen höher als 2 in θ). Dann ist

$$\lambda \approx -\frac{mg}{2l}\left(1 + \frac{\theta^2}{2} + \frac{1}{\omega_0^2}\theta\ddot{\theta} + \frac{1}{\omega_0^2}\dot{\theta}^2\right)$$

Jezt setzen wir Gl. (4) ein. Dann

$$\lambda = -\frac{mg}{2l}\left[1 + \left(\frac{x_0^2}{l^2}\right)\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\cos^2\omega t - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\cos 2\omega t\right)\right]$$

Da $\theta \ll 1 \to (x_0/l) \ll 1$ ist λ negativ. Dann

$$|\vec{Z}| = mg\left[1 + \left(\frac{x_0^2}{l^2}\right)\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\cos^2\omega t - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\cos 2\omega t\right)\right]$$

Es ist klar, dass $\vec{Z}$ zur Aufhängung gerichtet ist ($\lambda < 0$).

2. Zwei Pendel verbunden durch eine Feder (3+5+2+8=18 Punkte)

Ein Doppelpendel besteht aus zwei mathematischen Pendeln, d.h. Massepunkten m_1 und m_2, die am Ende je einer masselosen Stange der Länge l angebracht sind (s. Abb. 2). Der Abstand zwischen den Aufängepunkten sei d. Die Massepunkte seien durch eine Feder (mit Federkonstante k und vernachlässigbarem Gewicht) miteinander verbunden, die im spannunglosen Zustand die Länge d besitzen soll.

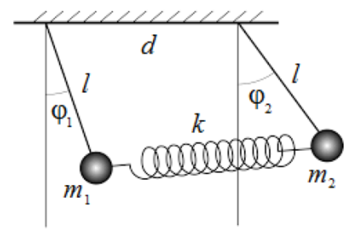


Abb. 2: Doppelpendel mit Feder.

(a) Wählen Sie als verallgemeinerte Koordinaten die Winkeln φ_1 und φ_2. Berechnen Sie den Abstand der Massen in Abhängigkeit von φ_1 und φ_2 und geben Sie die potentielle Energie der Feder an.

(b) Geben Sie die Lagrangefunktion für das gesamte System an. Leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen her.

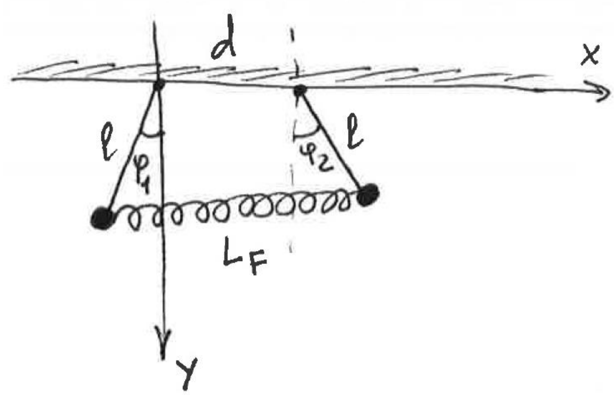
(c) Geben Sie die vereinfachte Lagrangefunktion für kleine Winkeln φ_1, φ_2 und die zugehörigen Bewegungsgleichungen an.

(d) Wie lautet die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen für harmonischen Schwingungen (d.h. für $\varphi_1, \varphi_2 \ll 1$)?

Lösung:

a)

$$x_1 = -l\sin\varphi_1$$
$$y_1 = l\cos\varphi_1$$
$$x_2 = l\sin\varphi_2 + d$$
$$y_2 = l\cos\varphi_2$$



Federlänge $L_F^2 = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2$

$$= [l(\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1) + d]^2 + [l(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1)]^2$$

$$= l^2[\sin^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_1 + 2\sin\varphi_2\sin\varphi_1 - 2\cos\varphi_2\cos\varphi_1]$$
$$+ 2dl(\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1) + d^2$$

$$= 2l^2[1 - \cos(\varphi_2 + \varphi_1)] + 2dl(\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1) + d^2$$

Energie der Feder

$$U_F = \frac{k}{2}\left(L_F - d\right)^2 = \frac{k}{2}\left[\sqrt{2\ell^2\left[1-\cos(\varphi_2+\varphi_1)\right] + 2d\ell\left(\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\right) + d^2} - d\right]^2$$

b) Lagrangefunktion

$$L = T - U$$

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 \ell^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \ell^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{\ell^2}{2}\left(m_1 \dot{\varphi}_1^2 + m_2 \dot{\varphi}_2^2\right)$$

$$U = U_1 + U_2 + U_F = m_1 g\ell\left(1-\cos\varphi_1\right) + m_2 g\ell\left(1-\cos\varphi_2\right) + U_F$$

$$= g\ell\left[m_1(1-\cos\varphi_1) + m_2(1-\cos\varphi_2)\right] + U_F$$

Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_{1,2}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi_{1,2}} \qquad (*)$$

$$m_1 \ell^2 \ddot{\varphi}_1 = -g\ell\, m_1 \sin\varphi_1 - \frac{\partial U_F}{\partial \varphi_1}$$

$$\frac{\partial U_F}{\partial \varphi_1} = k\left(L_F - d\right)\frac{\partial L_F}{\partial \varphi_1} = \frac{k\left(L_F-d\right)}{2L_F}\left[2\ell^2 \sin(\varphi_2+\varphi_1) + 2d\ell\cos\varphi_1\right]$$

$$\Longrightarrow \quad \ddot{\varphi}_1 = -\frac{g}{\ell}\sin\varphi_1 - \frac{k}{m_1}\frac{L_F-d}{L_F}\left[\sin(\varphi_2+\varphi_1) + \frac{d}{\ell}\cos\varphi_1\right],$$

wobei $L_F = \sqrt{2\ell^2\left(1-\cos(\varphi_2+\varphi_1)\right) + 2d\ell\left(\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\right) + d^2}$

für $\ddot{\varphi}_2$: umtauschen $\varphi_1 \longleftrightarrow \varphi_2$

$m_1 \longleftrightarrow m_2$

c) $\varphi_1, \varphi_2 \ll 1$

$$\Rightarrow \quad U_1 + U_2 \simeq \frac{gl}{2}\left(m_1\varphi_1^2 + m_2\varphi_2^2\right)$$

$$L_F^2 \simeq d^2 + 2dl(\varphi_1+\varphi_2) + O(\varphi_1^2, \varphi_2^2, \varphi_1\varphi_2)$$

$$U_F = \frac{k}{2}(L_F - d)^2 = \frac{k}{2}\left(\sqrt{d^2+2dl(\varphi_1+\varphi_2)} - d\right)^2$$

$$\simeq \frac{k}{2}d^2\left(\sqrt{1+\frac{2l}{d}(\varphi_1+\varphi_2)} - 1\right)^2 \simeq \frac{k}{2}d^2\left[\frac{l}{d}(\varphi_1+\varphi_2)\right]^2$$

$$= \frac{k}{2}l^2(\varphi_1+\varphi_2)^2$$

$$\Rightarrow \quad L = T - U = \frac{l^2}{2}\left(m_1\dot\varphi_1^2 + m_2\dot\varphi_2^2\right) - \frac{gl}{2}\left(m_1\varphi_1^2 + m_2\varphi_2^2\right) - \frac{k}{2}l^2(\varphi_1+\varphi_2)^2$$

(**)

d)

(*). (**)
$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 l^2 \ddot\varphi_1 = -m_1 g l \varphi_1 - k l^2(\varphi_1+\varphi_2) \\ m_2 l^2 \ddot\varphi_2 = -m_2 g l \varphi_2 - k l^2(\varphi_1+\varphi_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot\varphi_1 = -\frac{g}{l}\varphi_1 - \frac{k}{m_1}(\varphi_1+\varphi_2) \\ \ddot\varphi_2 = -\frac{g}{l}\varphi_2 - \frac{k}{m_2}(\varphi_1+\varphi_2) \end{cases}$$

Ansatz: $\varphi_{1,2} = c_{1,2}\, e^{i\omega t}$

$$\begin{cases} \left(\omega^2 - \frac{g}{l}\right)c_1 - \frac{k}{m_1}(c_1+c_2) = 0 \\ \left(\omega^2 - \frac{g}{l}\right)c_2 - \frac{k}{m_2}(c_1+c_2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - \frac{g}{\ell} - \frac{k}{m_1} & -\frac{k}{m_1} \\ -\frac{k}{m_2} & \omega^2 - \frac{g}{\ell} - \frac{k}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

Das lineare Gleichungssystem
hat nur nichttriviale Lösungen
falls $\det (\;) = 0$

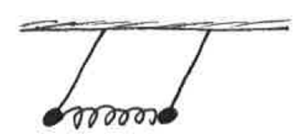
$$\left(\omega^2 - \frac{g}{\ell} - \frac{k}{m_1}\right)\left(\omega^2 - \frac{g}{\ell} - \frac{k}{m_2}\right) - \frac{k}{m_1}\frac{k}{m_2} = 0$$

$$\omega^4 - \omega^2\left[2\frac{g}{\ell} + \frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}\right] + \left(\frac{g}{\ell}\right)^2 + \frac{g}{\ell}\left(\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}\right) = 0$$

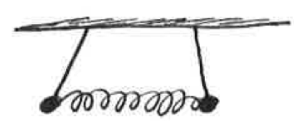
$$\omega_-^2 = \frac{g}{l}$$

$$\omega_+^2 = \frac{g}{\ell} + \frac{k}{M} \qquad \boxed{\frac{1}{M} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}$$

$$\omega = \omega_- \rightarrow c_1 + c_2 = 0$$



$$\omega = \omega_+ \rightarrow \frac{c_2}{c_1} = \frac{m_1}{m_2}$$



Allgemeine Lösung

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = a_- \cos(\omega_- t + \theta_-) + a_+ m_2 \cos(\omega_+ t + \theta_+) \\ \varphi_2(t) = -a_- \cos(\omega_- t + \theta_-) + a_+ m_1 \cos(\omega_+ t + \theta_+) \end{cases}$$

$a_+, a_-, \theta_+, \theta_-$ — beliebige Konstante
bestimmt durch Anfangsbedingungen

3. Gleitender Massenpunkt auf Kegel-Innenfläche (3+5+3+7=18 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m gleitet reibungsfrei unter dem Einfluß der Schwerkraft auf der Innenfläche eines Kegels mit dem halben Öffnungswinkel α (s. Abb. 3).

(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion des Teilchens in Koordinaten r und θ auf.

(b) Leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen des Teilchens ab. Welche Bewegungsgleichung kann man sofort integrieren? Welcher Erhaltungssatz folgt daraus?

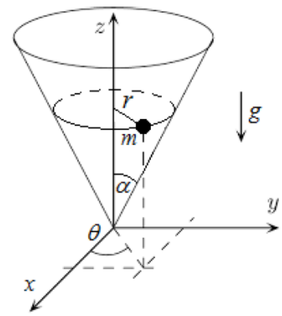


Abb. 3: Teilchen auf Kegel-Innenfläche.

(c) Zeigen Sie, dass sich das Teilchen auf Kreisbahnen bewegen kann. Wie groß ist dann die Geschwindigkeit des Teilchens?

(d) Zeigen Sie, dass die Bewegung des Teilchens auf diesen Kreisbahnen stabil verläuft, d.h. eine kleine Störung zu harmonischen Schwingungen um die Kreisbahn führt. Bestimmen Sie die Frequenz dieser Schwingungen.

Lösung:

a) verallgemeinerte Koordinaten r, θ

$$x = r\cos\theta \qquad \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$$
$$y = r\sin\theta \qquad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$
$$z = r\cot\alpha \qquad \dot{z} = \dot{r}\cot\alpha$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2\cot^2\alpha = \frac{\dot{r}^2}{\sin^2\alpha} + r^2\dot{\theta}^2$$

$$L = T - U$$
$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{\dot{r}^2}{\sin^2\alpha} + r^2\dot{\theta}^2\right) \quad \rightarrow$$
$$U = mgz = mgr\cot\alpha$$

$$L = \frac{m}{2}\left(\frac{\dot{r}^2}{\sin^2\alpha} + r^2\dot{\theta}^2\right) - mgr\cot\alpha$$

b) $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial L}{\partial r}$

$$\rightarrow \quad \frac{m\ddot{r}}{\sin^2\alpha} = mr\dot{\theta}^2 - mg\cot\alpha$$

$$\ddot{r} = r\sin^2\alpha\,\dot{\theta}^2 - g\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta} \rightarrow \frac{d}{dt}\underbrace{(mr^2\dot{\theta})}_{= L_z \text{ (Drehimpuls)}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad L_z \equiv mr^2\dot{\theta} = \text{const}$$ Drehimpulserhaltung

c) Kreisbahn: $r = \text{const} \equiv \rho$

$\ddot{r} = 0, \quad L_z = m\rho^2\dot{\theta}$

$$0 = \rho\sin^2\alpha\,\dot{\theta}^2 - g\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\theta} = \sqrt{\frac{g}{\rho}\cot\alpha} = \text{const} \equiv \omega$$

$$\theta = \omega t + c$$

$$v = \rho\dot{\theta} = \sqrt{g\rho\cot\alpha}\,; \qquad L_z = m\rho\sqrt{g\rho\cot\alpha}$$

d) $r(t) = \rho + x(t)$, $x(t)$ klein

$$\ddot{x} = (\rho + x)\sin^2\alpha\,\dot{\theta}^2 - g\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\dot{\theta} = \frac{L_z}{mr^2} = \frac{L_z}{m(\rho+x)^2} \quad \Big| \rightarrow$$

$$\ddot{x} = \frac{L_z^2\sin^2\alpha}{m^2(\rho+x)^3} - g\sin\alpha\cos\alpha$$

Entwicklung nach x : $\frac{1}{(\rho+x)^3} = \frac{1}{\rho^3} - \frac{3x}{\rho^4} + \ldots$

<u>0. Ordnung in x</u> : $0 = \frac{L_z^2\sin^2\alpha}{m^2\rho^3} - g\sin\alpha\cos\alpha$ (Kreisbahn)

<u>1. Ordnung</u>

$$\ddot{x} = -3\frac{L_z^2\sin^2\alpha}{m^2\rho^4}\,x$$

$\rightarrow$ harmonische Schwingungen um Kreisbahn mit Frequenz

$$\omega_0 = \sqrt{3}\,\frac{L_z\sin\alpha}{m\rho^2} = \sqrt{3\frac{g}{\rho}\cos\alpha\sin\alpha} = \sqrt{3}\sin\alpha\cdot\omega$$