Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Klassische Theoretische Physik II (Theorie B) **Sommersemester 2016**

Prof. Dr. Alexander Mirlin
PD Dr. Igor Gornyi, Nikolaos Kainaris

Musterlösung: Blatt 4
Besprechung: 17.05.2016

---

1. Ein Teilchen im elektromagnetischen Feld (2+2+3+8+10=25 Punkte)

Die Lagrangefunktion eines Teilchens mit der Ladung Q im zeitlich konstanten elektromagnetischen Feld lautet

$$L(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)=\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2-Q\Phi(\vec{r})+Q\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}(\vec{r}).$$

Dabei ist $\Phi(\vec{r})$ das elektrische Skalarpotential und $\vec{A}(\vec{r})$ das Vektorpotenzial,

$$\vec{E}(\vec{r})=-\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}),\quad \vec{B}(\vec{r})=\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r}).$$

(a) Beweisen Sie die in der Vorlesung benutzte Formel:

$$\sum_{j=1}^{3}\dot{x}_j\left(\vec{\nabla}A_j-\frac{\partial\vec{A}}{\partial x_j}\right)=\dot{\vec{r}}\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right].$$

$B_i=\epsilon_{ik\ell}\partial_k A_\ell$

$\left[\vec{v}\times\vec{B}\right]_i=\epsilon_{ijk}v_jB_k=\epsilon_{ijk}v_j\epsilon_{k\ell m}\partial_\ell A_m=$

$=v_j\partial_\ell A_m(\delta_{i\ell}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{j\ell})=v_j(\partial_i A_j-\partial_j A_i)$

s. Lösung zu Blatt 0: Aufgabe 2, Gln. (28)-(31)

(b) Bestimmen Sie den verallgemeinerten (kanonischen) Impuls und die Energie des Teilchens.

Der verallgemeinerte (kanonische) Impuls ergibt sich zu:

$$\vec{p}=\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}}=m\dot{\vec{r}}+Q\vec{A}\quad\Rightarrow\quad\dot{\vec{r}}=\frac{1}{m}\left(\vec{p}-Q\vec{A}\right)$$

Für die Energie gilt:

$$E=\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}}\dot{\vec{r}}-L=\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2+Q\Phi=\frac{\left(\vec{p}-Q\vec{A}\right)^2}{2m}+Q\Phi$$

(c) Betrachten Sie den Fall der räumlich homogenen Felder, $\vec{E} \parallel x$-Achse und $\vec{B} \parallel z$-Achse, d.h. $\vec{E}(\vec{r}) = (E, 0, 0)$ und $\vec{B}(\vec{r}) = (0, 0, B)$. Geben Sie das elektrische Potential $\Phi(\vec{r})$ an. Zeigen Sie, dass $\vec{A}^{(1)}(\vec{r}) = (0, Bx, 0)$ und $\vec{A}^{(2)}(\vec{r}) = (-By/2, Bx/2, 0)$ dem gegebenen magnetischen Feld entsprechen.

$\vec{E}(\vec{r}) = (E, 0, 0)$ $\quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \Rightarrow \quad \Phi = -Ex + \text{const}$

$\vec{B}(\vec{r}) = (0, 0, B)$

$\vec{A}$ ist nicht eindeutig definiert (Eich-Freiheit)

$A^{(1)}(\vec{r}) = (0, Bx, 0) \rightarrow B_z^{(1)} = \partial_x A_y^{(1)} - \partial_y A_x^{(1)} = B$

$A^{(2)}(\vec{r}) = \frac{B}{2}(-y, x, 0) \rightarrow B_z^{(2)} = \partial_x A_y^{(2)} - \partial_y A_x^{(2)} = B$

(andere Komponente $\vec{B}$ sind null)

(d) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für den obigen Fall homogener Felder her. Zeigen Sie, dass die Transformation $y(t) = \tilde{y}(t) - (E/B)t$ das elektrische Feld aus den Gleichungen eliminiert, und geben Sie die Lösung der Bewegungsgleichungen an. Wie sehen die Bahnkurven des Teilchen aus?

$E \neq 0$

$m\ddot{x} = Q\dot{y}B + QE$

$m\ddot{y} = -Q\dot{x}B$

$m\ddot{z} = 0 \longrightarrow \dot{z} = \text{const} = v_z$

$\rightarrow \boxed{z = v_z t + z_0}$ (*)

$y = \tilde{y} - \frac{E}{B}t \rightarrow \dot{y} = \dot{\tilde{y}} - \frac{E}{B}, \ddot{y} = \ddot{\tilde{y}}$

$\begin{cases} m\ddot{x} = Q\dot{\tilde{y}}B \\ m\ddot{\tilde{y}} = -Q\dot{x}B \end{cases} \Rightarrow \quad E = 0$

die selbe Gleichungen

Wir betrachten nun den Fall *E=0*.

$\dot{x} = v_x, \quad \dot{y} = v_y$

$$\left.\begin{aligned} \dot{v}_x &= \frac{QB}{m} v_y \\ \dot{v}_y &= -\frac{QB}{m} v_x \end{aligned}\right| \Rightarrow \quad \ddot{v}_x = -\left(\frac{QB}{m}\right)^2 v_x$$

$\omega_c = \frac{QB}{m}$ Zyklotron-Frequenz

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} v_x &= v_0 \sin(\omega_c t + \varphi_0) \\ v_y &= v_0 \cos(\omega_c t + \varphi_0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} x &= -\frac{v_0}{\omega_c} \cos(\omega_c t + \varphi_0) + X_0 \\ y &= \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t + \varphi_0) + Y_0 \end{aligned}} \quad (**)$$

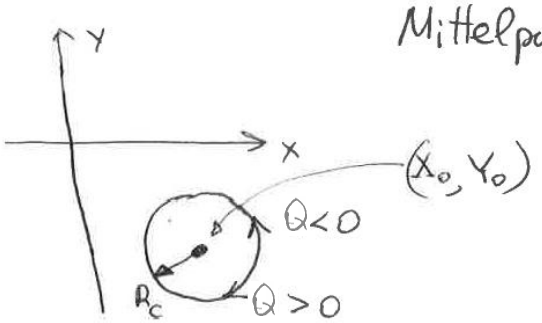
$\frac{v_0}{\omega_c} = R_c$ Zyklotron-Radius

(*), (**) – allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen

z-Richtung: freie Bewegung; 2 beliebige Konstanten v_z (Geschwind.) und z_0 (Anfangsposition)

xy-Ebene: Kreisbahn $(x - X_0)^2 + (y - Y_0)^2 = R_c^2$

Mittelpunkt (X_0, Y_0), Radius R_c

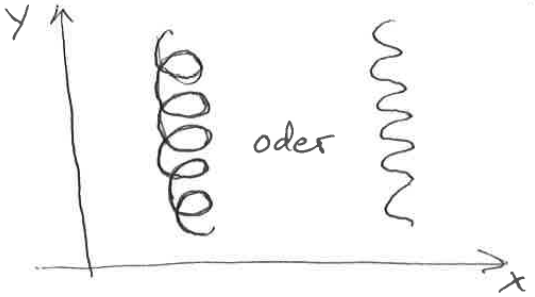


Zusammen mit gleichförmiger Bewegung in z-Richtung → Schraubenbahn

$E \neq 0 \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned} x &= -R_c \cos(\omega_c t + \varphi_0) + X_0 \\ y &= -\frac{Et}{B} + R_c \sin(\omega_c t + \varphi_0) + Y_0 \end{aligned}$$

Kreisbewegung + gleichförmige Bewegung in y-Richtung mit Geschwindigkeit $v = -E/B$



Zykloide

(+ freie Bewegung in z-Richtung mit beliebiger Geschwindigkeit)

(e) Bestimmen Sie die Bahnkurve eines geladenen Teilchens im Magnetfeld $\vec{B} = b\vec{r}/r^3$ (diese Form hat ein magnetisches Feld in der Nähe der Enden einer langen dünnen Magnetspule).

Bewegungsgleichung:

$$m\dot{\vec{v}} = Q\frac{b}{r^3}[\vec{v}\times\vec{r}] \qquad (1)$$

Erhaltungssätze:

$$\frac{mv^2}{2} = E \quad \text{(Energie)} \qquad (2)$$

$$m[\vec{r}\times\vec{v}] - Qb\frac{\vec{r}}{r} = \vec{J} \quad \text{(Drehimpuls)} \qquad (3)$$

Gl. (1) $\cdot\,\vec{r}$: $\vec{r}\cdot\dot{\vec{v}} = 0$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\cdot\vec{v}) = \dot{\vec{r}}\cdot\vec{v} + \vec{r}\cdot\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} = v^2$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\cdot\vec{v}) = \frac{d}{dt}(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}^{\,2} \quad\Rightarrow\quad \frac{d^2}{dt^2}\frac{r^2}{2} - v^2 = 0 \qquad (1a)$$

$$\Rightarrow \quad r^2 = r_0^2 + v^2(t-t_0)^2 \qquad (4)$$

Gl. (3) $\cdot\,\frac{\vec{r}}{r}$ $\Rightarrow$

$$-Qb = J\cos\theta, \qquad (5)$$

θ - Polarwinkel in Kugelkoordinaten

Projektion von Gl. (3) auf $\vec{e}_z$: $(z \parallel J)$

$$mr^2\dot{\varphi}\sin^2\theta - Qb\cos\theta = J \qquad (5a)$$

(5), (5a) $\Rightarrow$ $\dot{\varphi} = \frac{J}{mr^2}$ (6)

$t = t_0 \Rightarrow v = r_0 \dot{\varphi} \sin\theta$

mit (6) $\Rightarrow$ $J = \frac{m r_0 v}{\sin\theta}$,

mit (5) $\Rightarrow$ $\operatorname{tg}\theta = -\frac{m r_0 v}{Qb}$ (7)

Wir integrieren nun

$$\dot{\varphi} = \frac{r_0 v}{\sin\theta \; r^2(t)} \qquad (6a)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \varphi_0 + \frac{1}{\sin\theta} \arctan \frac{v(t-t_0)}{r_0} \qquad (8)$$

$v = \text{const.}$, $\theta = \text{const.}$

2. Zwei Teilchen im elektromagnetischen Feld (5+5=10 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Bewegung von zwei geladenen Teilchen (Masse: m_1, m_2, Ladungen: Q_1, Q_2) im homogenen elektrischen Feld mithilfe der Gleichungen für ihren Massenmittelpunkt und für ein Teilchen der Masse $m = m_1 m_2/(m_1+m_2)$ in einem bestimmten Feld beschrieben werden kann.

$$L(\vec{r}_1, \dot{\vec{r}}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_2) = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^2 - Q_1\Phi(\vec{r}_1) + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^2 - Q_2\Phi(\vec{r}_2) - \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}, \qquad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \qquad \Phi(\vec{r}_{1,2}) = -\vec{E}\vec{r}_{1,2} + \Phi_0$$

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}$$

$$L(\vec{r}_1, \dot{\vec{r}}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_2) = L(\vec{R}, \dot{\vec{R}}) + L(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$$

$$L(\vec{R}, \dot{\vec{R}}) = \frac{m_1+m_2}{2}\dot{\vec{R}}^2 + (Q_1+Q_2)(\vec{E}\vec{R} - \Phi_0)$$

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - \frac{Q_1 Q_2}{r} - m\left(\frac{Q_1}{m_1} - \frac{Q_2}{m_2}\right)\vec{E}\vec{r}$$

(b) Unter welchen Bedingungen entkoppeln die Bewegungsgleichungen für die Schwerpunktskoordinate und für die Relativbewegung der zwei geladenen Teilchen im homogenen Magnetfeld?

$$L(\vec{r}_1, \dot{\vec{r}}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_2) = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^2 + Q_1\dot{\vec{r}}_1 \cdot \vec{A}(\vec{r}_1) + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^2 + Q_2\dot{\vec{r}}_2 \cdot \vec{A}(\vec{r}_2) - \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

$$\vec{A}(\vec{r}_{1,2}) = \frac{1}{2}[\vec{B} \times \vec{r}_{1,2}]. \quad \text{Für} \quad \frac{Q_1}{m_1} = \frac{Q_2}{m_2} \quad \text{gilt :}$$

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{\vec{R}}^2 + (Q_1 + Q_2)\ \dot{\vec{R}} \cdot \vec{A}(\vec{R}) + \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + \frac{Q_1 m_2^2 + Q_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}\ \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}) - \frac{Q_1 Q_2}{r}$$

3. Variationsrechnung: Problem des schnellsten Falles

(2+3+3+2+5=15 Punkte)

Ein Massenpunkt gleitet reibungsfrei unter dem Einfluß der Schwerkraft entlang einer Kurve $y(x)$ vom Anfangspunkt $A = (0, 0)$ zum Endpunkt $B = (x_B, y_B)$, s. Abb. 1. Seine Anfangsgeschwindigkeit ist null. Der Tiefpunkt der Bahn kann tiefer liegen als der Endpunkt.
Wie muss man $y(x)$ wählen, damit die Zeit T, die das Teilchen für den Weg von A nach B braucht, minimal ist? Im folgenden sollen Sie diese Fragestellung mithilfe der Varationsrechnung beantworten.

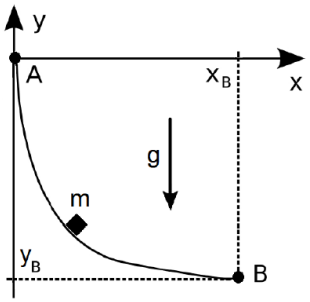


Abb. 1.

(a) Starten Sie (begründen Sie dies auch) von dem Ausdruck

$$T = \int_A^B \frac{ds}{v},$$

wobei v den Betrag der Geschwindigkeit bezeichnet. Drücken Sie das Element der Bogenlänge ds durch dx und $dy/dx \equiv y'(x)$ aus.

Zuerst einmal gilt natürlich

$$T = \int_A^B dt$$

Da weiterhin gilt $dt = \frac{ds}{v}$ mit dem Wegelement

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx\sqrt{1 + (dy/dx)^2} = dx\sqrt{1 + [y'(x)]^2}$$

erhält man die Beziehung

$$T = \int_{x_A}^{x_B} dx \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{v}.$$

(b) Finden Sie die Geschwindigkeit aus dem Energiesatz und stellen Sie T in der Form eines Funktionals

$$T[y(x)] = \int_0^{x_B} K(y(x), y'(x))dx$$

dar.

$$E = \frac{m}{2}\vec{v}^2 + mgy = 0 \qquad \text{(Anfangsbedingung } y = y_A = 0,\ \vec{v} = 0\text{)}$$

$$\Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{-2gy}\,, \quad y < 0$$

$$T[y(x)] = \int_0^{x_B} dx \underbrace{\sqrt{1+y'^2}\,\frac{1}{\sqrt{-2gy}}}_{K(y(x),\,y'(x))}$$

(c) Geben Sie die Lagrange-Gleichungen für ein Extremum dieses Funktionals an.

Um das Funktional $T[y]$ nun zu minimieren, d.h. die optimale Kurve zu finden, führen wir analog zur Vorlesung eine Variation durch: Angenommen, $y(x)$ sei die gesuchte Funktion die $T[y]$ minimiert, dann wird $T[y]$ durch die Ersetzung $y(x) \to y(x) + \delta y(x)$ ($\delta y(x)$ heisst Variation mit $\delta y(x_A) = \delta y(x_B) = 0$) wachsen. Da $T[y]$ bei $\delta y(x) = 0$ ein Minimun hat gilt also $\delta T[y] = 0$.

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial K}{\partial y'} - \frac{\partial K}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial K}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{-2gy}}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial K}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{-2gy}\sqrt{1+y'^2}}\left[-\frac{1}{2}\frac{y'^2}{y} + y'' - \frac{y'^2 y''}{1+y'^2}\right]$$

$$\frac{\partial K}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{-2gy}}\cdot\frac{-1}{2y}\cdot\sqrt{1+y'^2}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{-2gy}} \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \left\{ -\frac{1}{2}\frac{y'^2}{y} + y'' - \frac{y'^2 y''}{1+y'^2} + \frac{1+y'^2}{2y} \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{y''}{1+y'^2} + \frac{1}{2y} = 0$$

$$2yy'' + y'^2 + 1 = 0$$

(d) Zeigen Sie in Analogie zur Energieerhaltung in der Mechanik eines Teilchens in einem zeitlich konstanten Potential, dass die Größe

$$I = y' \frac{\partial K}{\partial y'} - K$$

konstant (d.h. unabhängig von x) ist.

$$I = y' \frac{\partial K}{\partial y'} - K$$

$$\frac{dI}{dx} = y' \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial K}{\partial y'}\right) + y'' \frac{\partial K}{\partial y'} - \underbrace{\frac{\partial K}{\partial x}}_{=0} - \frac{\partial K}{\partial y} y' - \frac{\partial K}{\partial y'} y''$$

$$= y' \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial K}{\partial y'}\right) - \frac{\partial K}{\partial y} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad I = \text{const}$$

$$I = \frac{y'^2}{\sqrt{-2gy}\sqrt{1+y'^2}} - \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{-2gy}} = -\frac{1}{\sqrt{-2gy}\sqrt{1+y'^2}}$$

(Man kann auch explizit prüfen (mit Hilfe der Bewegungsgleichung), das $dI/dx = 0$:

$$\frac{dI}{dx} = y' \cdot I \cdot \left(\frac{1}{2}\frac{1}{y} + \frac{y''}{1+y'^2} \right) = 0$$

Analogie:

$K \longleftrightarrow L$ (Lagrangefunktion)

$y \longleftrightarrow$ generalisierte Koordinate q

$X \longleftrightarrow t$ (Zeit)

$I \longleftrightarrow H$ (Hamiltonfunktion, Energie)

(e) Damit erhalten Sie eine Differentialgleichung erster Ordnung der Form

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{-y}{\alpha + y}}.$$

Was ist α als Funktion von I? Diese Differentialgleichung kann über die Substitution $y = -(1-\cos\tau)\alpha/2$ leicht gelöst werden. Die Kurve ist durch die Parameterdarstellung $y(\tau)$ und $x(\tau)$ gegeben. Finden Sie $x(\tau)$. Skizzieren Sie die Lösungskurven $y(x)$. Welche Steigung hat die Kurve am Anfangspunkt?

$$-\frac{1}{I} = \sqrt{-2gy}\,\sqrt{1+y'^2}$$

$$\Rightarrow \quad y'^2 = -1 - \frac{1}{2gI^2 y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \pm\sqrt{\frac{-y}{\alpha+y}} \qquad \alpha = \frac{1}{2gI^2} > 0$$

Substitution

$$y = -\frac{\alpha}{2}(1-\cos\tau)$$

$$\sqrt{\frac{-y}{\alpha+y}} = \sqrt{\frac{1-\cos\tau}{1+\cos\tau}} = \pm\frac{\sin(\tau/2)}{\cos(\tau/2)}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{d\tau}\Big/\frac{dy}{d\tau} = -\frac{1}{\frac{\alpha}{2}\sin\tau}\frac{dx}{d\tau} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{d\tau} = \pm\alpha\sin^2\frac{\tau}{2}$$

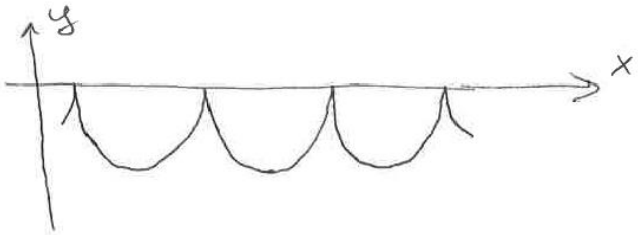
$$\frac{dx}{d\tau} = \pm\frac{\alpha}{2}(1-\cos\tau)$$

$$x = \frac{\alpha}{2}(\tau - \sin\tau)$$

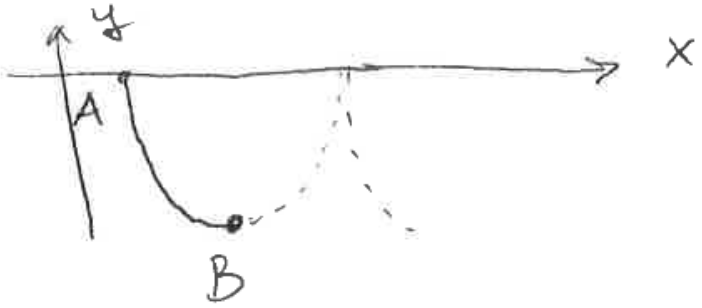
(Vorzeichen ist "+", wenn $x_B > 0$)

$$\begin{cases} y = -\frac{\alpha}{2}(1-\cos\tau) \\ x = \frac{\alpha}{2}(\tau - \sin\tau) \end{cases}$$

Zykloide



Anfangspunkt : $\tau \to 0$

$$y \simeq -\frac{\alpha}{2}\tau^2/2 = -(\alpha/4)\tau^2$$
$$x \simeq \frac{\alpha}{2}\tau^3/6 = (\alpha/12)\tau^3$$

$$\Rightarrow y \propto -x^{2/3}$$
$$\frac{dy}{dx} \propto -x^{-1/3} \longrightarrow \infty \quad \text{im Limes } x \to 0$$