Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Klassische Theoretische Physik II (Theorie B) **Sommersemester 2016**

Prof. Dr. Alexander Mirlin
PD Dr. Igor Gornyi, Nikolaos Kainaris

Musterlösung: Blatt 6.
Besprechung: 31.05.2016

---

1. Die Wirkung (4+4+4+8=20 Punkte)

Betrachten Sie eine eindimensionale Bewegung mit dem festen Anfangs- und Endpunkt $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$. Bestimmen Sie die Bahnkurven und berechnen Sie die Wirkung $S(x_1, t_1; x_2, t_2)$ und ihre Ableitungen $\partial S/\partial x_2$, $\partial S/\partial t_2$ in den drei Fällen:

(a) freies Teilchen der Masse m;

(b) ein Teilchen im Schwerefeld der Erde;

(c) harmonischer Oszillator (ein Teilchen im quadratischen Potenzial).

Betrachten Sie nun kleine Ablenkungen $\Delta x(t)$ (nicht mit einer infinitesimalen Variation $\delta x(t)$ zu verwechseln) von den genauen Bahnkurven, die Sie für die drei obengenannten Fälle bestimmt haben. Lassen Sie die Anfangsbedingungen fest: $\Delta x(t_1) = \Delta x(t_2) = 0$.

(d) Zeigen Sie für die Fälle (a) und (b), dass die Wirkung auf der genaue Bahnkurven das absolute Minimum hat, d.h. $\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x) > 0$ gilt.

5 Bonuspunkte: Für welche Zeiten $t_2 - t_1$ besitzt ΔS für den Fall (c) ein absolutes Minimum?

Lösung:

(a) Die Bewegungsgleichung eines freien Teilchens lautet

$$m\ddot{x} = 0.$$

Integration dieser Gleichung von t_1 bis t mit der Definition $\dot{x}(t_1) = v_0$ ergibt

$$\dot{x} = v_0\,.$$

Weitere Integration von t_1 bis t mit $x(t_1) = x_1$ ergibt

$$x(t) = x_1 + v_0(t - t_1)\,.$$

Um v_0 zu bestimmen benutzen wir nun $x(t_2) = x_2$, womit

$$v_0 = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

folgt. Damit ist die Lösung mit der Randbedingungen $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$ also gegeben durch

$$x(t) = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}(t - t_1)\,.$$

Die Lagrange-Funktion auf dieser Bahnkurve lautet

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2(t) = \frac{m}{2}\frac{(x_2 - x_1)^2}{(t_2 - t_1)^2}.$$

Die Wirkung ist damit

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dtL = \frac{m}{2}\frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1}.$$

Die Ableitungen sind gegeben durch:

$$\frac{\partial S}{\partial x_2} = m\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = mv_0\,,$$

$$\frac{\partial S}{\partial t_2} = -\frac{m}{2}\frac{(x_2 - x_1)^2}{(t_2 - t_1)^2} = -\frac{mv_0^2}{2}.$$

(b) Die Bewegungsgleichung eines Teilchens im Schwerefeld der Erde ist

$$m\ddot{x} = mg = F.$$

Analoges Vorgehen (Integration) zu (a) liefert als Lösung mit der Randbedingungen $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$

$$x(t) = x_1 + v_0(t - t_1) + F\frac{(t - t_1)^2}{2m},$$

wobei

$$v_0 = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} - F\frac{t_2 - t_1}{2m}.$$

Die Lagrange-Funktion auf dieser Bahnkurve ($U = -Fx$) lautet somit

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2(t) + Fx(t) = \frac{mv_0^2}{2} + Fx_1 + 2v_0F(t - t_1) + \frac{F^2}{m}(t - t_1)^2.$$

Die Wirkung ist somit

$$S = \frac{m}{2}\frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1} + \frac{1}{2}F(x_1 + x_2)(t_2 - t_1) - \frac{F^2}{24m}(t_2 - t_1)^3.$$

Die Ableitungen sind hier gegeben durch:

$$\frac{\partial S}{\partial x_2} = m\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} + \frac{1}{2}F(t_2 - t_1) = m\dot{x}(t_2),$$

$$\frac{\partial S}{\partial t_2} = -\frac{m}{2}\frac{(x_2 - x_1)^2}{(t_2 - t_1)^2} + \frac{1}{2}F(x_1 + x_2) - \frac{F^2}{8m}(t_2 - t_1)^2 = -\frac{mv_0^2}{2} + Fx_1.$$

(c) Die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators ($U = m\omega^2 x^2/2$) lautet

$$m\ddot{x} = -m\omega^2 x.$$

Die Lösung mit der Randbedingungen $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$ ist

$$x(t) = x_1 \cos\omega(t - t_1) + A \sin\omega(t - t_1),$$

mit

$$A = \frac{x_2 - x_1 \cos\omega(t_2 - t_1)}{\sin\omega(t_2 - t_1)}.$$

Die Wirkung ist damit

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} m\omega \Big[(x_2 - x_1 \cos\omega(t_2 - t_1))^2 \cot\omega(t_2 - t_1) \\ &+ x_1^2 \sin\omega(t_2 - t_1) \cos\omega(t_2 - t_1) - 2x_1 x_2 \sin\omega(t_2 - t_1) \Big]. \end{aligned}$$

Die Ableitungen sind gegeben durch:

$$\frac{\partial S}{\partial x_2} = m\omega \left[(x_2 - x_1 \cos\omega(t_2 - t_1)) \cot\omega(t_2 - t_1) - x_1 \sin\omega(t_2 - t_1) \right] = m\dot{x}(t_2),$$

$$\frac{\partial S}{\partial t_2} = -\frac{m}{2}\dot{x}^2(t_2) - \frac{m}{2}\omega^2 x^2(t_2).$$

Zu den physikalische Bedeutungen der Ableitungen: Die Ableitung nach der Zeit t_2 ergibt

$$\frac{\partial S}{\partial t_2} = -E,$$

wo E ist die Energie ist. Die Ableitung nach dem Ort x_2 ergibt

$$\frac{\partial S}{\partial x_2} = p(t_2),$$

wobei $p(t_2) = mv(t_2)$ der Impuls im Punkt x_2 ist. Dies lässt sich auch ganz allgemein zeigen.

(d) Für Fall (a) ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta S &= S(x + \Delta x) - S(x) = \frac{m}{2} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} dt \, [\dot{x}(t) + \Delta\dot{x}(t)]^2 - \int_{t_1}^{t_2} dt \, [\dot{x}(t)]^2 \right\} \\ &= \frac{m}{2} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} dt \, [\Delta\dot{x}(t)]^2 + 2 \int_{t_1}^{t_2} dt \, [\dot{x}(t) \Delta\dot{x}(t)] \right\} \\ &= \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt \, [\Delta\dot{x}(t)]^2 + [m\dot{x}(t)\Delta x(t)]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \, [m\ddot{x}(t)] \, \Delta x(t) \\ &= \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt \, [\Delta\dot{x}(t)]^2 , \end{aligned}$$

wobei

$$\Delta\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\Delta x(t),$$

und partielle Integration benutzt wurde. Weiter gilt $\Delta x(t_1) = \Delta x(t_2) = 0$ und die Bewegungsgleichung lautet $m\ddot{x} = 0$. Es ist somit klar, dass die Wirkung auf der wahren Bahnkurve ein absolute Minimum besitzt, da für beliebiges $\Delta x(t)$ die Differenz ΔS positiv ist.

Für den Fall (b) hat man entsprechend

$$\begin{aligned}
\Delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{m}{2}\left(\dot{x}(t) + \Delta\dot{x}(t)\right)^2 + mg(x(t) + \Delta x(t))\right] - \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{m}{2}\left(\dot{x}(t)\right)^2 + mgx(t)\right] \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt\, m\dot{x}(t)\Delta\dot{x}(t) + \int_{t_1}^{t_2} dt\, mg\Delta x(t) + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{m}{2}\left(\Delta\dot{x}(t)\right)^2 \\
&= \left[m\dot{x}\Delta x\right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt\ \left(mg - m\ddot{x}\right)\Delta x dt + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{m}{2}\left(\Delta\dot{x}(t)\right)^2 \\
&= \frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2} dt\left(\Delta\dot{x}(t)\right)^2 > 0
\end{aligned}$$

wobei wieder partielle Integration benutzt wurde, $\Delta x(t_1) = \Delta x(t_2) = 0$ und die Bewegungsgleichung $m\ddot{x} = mg$.

5 Bonuspunkte:

Für den Fall (c) , den Oszillator ergibt sich analog

$$\Delta S = \frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2} dt\left[\left(\Delta\dot{x}(t)\right)^2 - \omega^2\left(\Delta x(t)\right)^2\right].$$

Man sieht, dass es hier zwei positive (wegen der Quadrate) Ausdrücke gibt mit verschiedenem Vorzeichen. Um eine genauer Aussage machen zu können entwickeln wir nun $\Delta x(t)$ in einer orthogonalen Basis auf dem Raum $V = \{f \in C^1([t_1, t_2], \mathbb{R}) | f(t_1) = f(t_2) = 0\}$ (d.h. der Raum der stetig differenzierbaren Funktionen, die an den Rändern Null sind, denn in eben diesem Raum liegen die Variationen $\Delta x(t)$). Eine orthogonale Basis dieses Raumes bilden die Funktionen

$$f_n(t) = \sin\left(\frac{n\pi}{t_2 - t_1}(t - t_1)\right), n \in \mathbb{N}$$

Damit kann man also jede beliebige Variation mittels dieser Basisfunktionen entwickeln. (mit $\Delta x(t_1) = \Delta x(t_2) = 0$):

$$\Delta x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \pi n \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}.$$

Man hat zudem

$$\Delta\dot{x}(t) = \frac{\pi}{t_2 - t_1}\sum_{n=1}^{\infty} a_n n \cos \pi n \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}.$$

Einsetzen der Ausdrücke und Variablensubstitution $x = \frac{\pi}{t_2 - t_1}(t - t_1)$ führt auf

$$\Delta S = \frac{m}{2}\frac{t_2 - t_1}{\pi}\int_0^\pi dx \sum_{n,m} a_n a_m \left[\frac{(\pi n)(\pi m)}{(t_2 - t_1)^2}\cos(nx)\cos(mx) - \omega^2 \sin(nx)\sin(mx)\right] .$$

Verwendet man nun die Orthogonalität, d.h.

$$\int_0^\pi dx \cos(nx)\cos(mx) = \int_0^\pi dx \sin(nx)\sin(mx) = \frac{\pi}{2}\delta_{nm}$$

so ergibt sich schließlich

$$\Delta S = \frac{m}{4}(t_2 - t_1)\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left(\frac{\pi^2 n^2}{(t_2 - t_1)^2} - \omega^2\right) .$$

Wann hat nun S ein absolutes Minimum (d.h. ist $\Delta S > 0$)? Dazu muss der Klammerausruck strickt positiv sein. Das ist der Fall, wenn

$$\frac{\pi n}{(t_2 - t_1)} > \omega \quad \Rightarrow \quad (t_2 - t_1) < \frac{\pi n}{\omega} .$$

Damit dies stets erfüllt ist muss also

$$(t_2 - t_1) < \frac{\pi}{\omega}$$

gelten. Man sieht daran, dass die Wirkung auf der genaue Bahnkurven nur für kurze Zeit $t_2 - t_1 < T/2$ (für die Periodendauer gilt $\omega = \frac{2\pi}{T}$) ein absolutes Minimum hat. Für Zeiten $t_2 - t_1 > T/2$ lassen sich sowohl Variationen finden, die $\Delta S > 0$ herbeiführen als auch Variationen, für die $\Delta S < 0$ gilt und man hat es somit mit einem Sattelpunkt zu tun.

2. Prinzip der kleinsten Wirkung: Kugel im Schwerefeld (3+4+3=10 Punkte)

Der schiefe Wurf einer Kugel der Masse m im Schwerefeld der Erde soll durch Variation aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung berechnet werden. Die Kugel bewegt sich in der x-z-Ebene, die Schwerkraft zeigt in negative z-Richtung.

(a) Berechnen Sie die Wirkung für die Kugel mit dem Ansatz $x(t) = x_0 + v_x t + at^2$ und $z(t) = z_0 + v_z t + bt^2$.

(b) Bestimmen Sie die Konstanten des Ansatzes so, dass S extremalisiert wird. Dabei sind die Endpunkte der Bahn einzusetzen, $x(0) = z(0) = 0$, $x(T) = x_m$, $z(T) = 0$. Wie lautet die Bahn, die von der Kugel tatsächlich durchlaufen wird?

(c) Bestimmen Sie die Lagrangegleichungen und vergleichen Sie deren spezielle Lösung mit dem Ergebnis aus (b).

Lösung:

(a) Kugel im Schwerefeld in x-z-Ebene: Lagrange: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - mgz$
Ansatz für die zu variierende Bahn in der Wirkung:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_x t + at^2 \\ z(t) &= z_0 + v_z t + bt^2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x} &= v_x + 2at \\ \dot{z} &= v_z + 2bt \end{aligned}$$

Das in die Lagrangefunktion einsetzen ergibt

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left[\underbrace{(v_x^2 + v_z^2 - 2gz_0)}_{A_0} + \underbrace{(4v_x a + 4v_z b - 2gv_z)}_{A_1} t + \underbrace{(4a^2 + 4b^2 - 2gb)}_{A_2} t^2\right]$$

Die Wirkung ist dann

$$\boxed{S = \int_0^T \mathrm{d}t\, \mathcal{L}(x, \dot{x}, z, \dot{z}) = \frac{1}{2}m\left[A_0 T + A_1 \frac{T^2}{2} + A_2 \frac{T^3}{3}\right]}$$

(b) Endpunkte als Randbedingungen: $x(0) = z(0) = 0\,, x(T) = x_m\,, z(T) = 0\,,$ daraus folgt für den Ansatz von oben:

$$\boxed{x_0 = z_0 = 0 \quad , \quad v_x = \frac{x_m}{T} - aT \quad , \quad v_z = -bT}$$

Jetzt sind nur noch a, b unbestimmt. Die Bahn in S wird also durch a, b festgelegt, und die Bahn in S zu variieren heißt jetzt, a und b zu variieren. S ist extremal, wenn diese Variation verschwindet, also $\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \quad , \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0\,.$ Man muss beim Ableiten beachten, dass v_x und v_z von a, b abhängen, d.h., erst v_x, v_z einsetzen, dann nach a oder b ableiten. Etwas eleganter: Kettenregel benutzen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(a,b)}{\partial a} &= \frac{1}{2}m\left[(2v_x\frac{\partial v_x}{\partial a})\,T + (4v_x + 4a\frac{\partial v_x}{\partial a})\frac{T^2}{2} + (8a)\frac{T^3}{3}\right] \\ \frac{\partial S(a,b)}{\partial b} &= \frac{1}{2}m\left[(2v_z\frac{\partial v_z}{\partial b})\,T + (4v_z + 4b\frac{\partial v_z}{\partial b} - 2g\frac{\partial v_z}{\partial b})\frac{T^2}{2} + (8b - 2g)\frac{T^3}{3}\right] \end{aligned}$$

Einsetzen von $\frac{\partial v_x}{\partial a} = -T \;,\; \frac{\partial v_z}{\partial b} = -T$ und alles ausmultiplizieren und -addieren liefert

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{1}{3}mT^3\, a \quad , \quad \frac{\partial S}{\partial b} = \frac{1}{3}mT^3\,(b + \frac{1}{2}g)$$

Nullsetzen liefert

$$a = 0 \quad , \quad b = -g/2$$

und die physikalische Bahn der Kugel lautet, mit $v_x = x_m/T\;,\; v_z = gT/2\,,$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= v_x t = \frac{x_m}{T}t \\ z(t) &= v_z t - \frac{g}{2}t^2 = \frac{g}{2}(tT - t^2) \end{aligned}}$$

Das so etwas herauskommt, war natürlich schon vorher klar: in x-Richtung: gleichförmige Bewegung, in z-Richtung: freier Fall, kennen wir schon aus Theorie A.

(c) Zum Vergleich der 'konventionelle' Weg: Die Bahn, die die Wirkung extremalisiert, wird ja durch die Lagrangegleichungen bestimmt, also:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_\alpha} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_\alpha} = 0 \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} m\ddot{x} &= 0 \\ m\ddot{z} &= -mg \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_x t \\ z(t) &= z_0 + v_z t - \frac{g}{2}t^2 \end{aligned}$$

Die Randbedingungen (Endpunkte für $t=0$ und $t=T$) legen die Integrationskonstanten x_0, z_0, v_x, v_z fest, wie in b). Normalerweise hat man als Randbedingungen nicht die Endpunkte der Bahn, sondern die Anfangspunkte $x(0)=0, z(0)=0$ und die Anfangsgeschwindigkeiten $\dot{x}(0)=v_x$, $\dot{z}(0)=v_z$. Das ist natürlich äquivalent und läßt sich umrechenen in die Wurfzeit T und -weite x_m:

$$\begin{aligned} \dot{x}(0) &= v_x = x_m/T \\ \dot{z}(0) &= v_z = gT/2 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad T = \frac{2v_z}{g}\ , \quad x_m = \frac{2}{g}v_x v_z$$

3. Prinzip der kleinsten Wirkung: Harmonischer Oszillator (10 Punkte)

Minimieren Sie die Wirkung für den harmonischen Oszillator (Masse m, Frequenz ω, Periode $T = 2\pi/\omega$)

$$S_{T/4} = \int_0^{T/4} dt\, L(x(t), \dot{x}(t)), \qquad x(0) = 0, \quad x(T/4) = 1$$

mit dem Ansatz $x(t) = a + bt + ct^2$ bezüglich der Parameter a, b und c. (Berücksichtigen Sie die oben gegebenen Randbedingungen!) Skizzieren Sie das so gewonnene $x(t)$ und vergleichen Sie es mit der exakten Lösung des harmonischen Oszillators.

Lösung:

$$S_{T/4} = \frac{m}{2}\int_0^{T/4} dt\,[\dot{x}^2 - \omega^2 x^2]\ ; \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}\ ; \qquad \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega}$$

$$x = a + bt + ct^2$$

$$x(0) = 0 \longrightarrow a = 0$$

$$x(T/4) = 1 \longrightarrow b(T/4) + c(T/4)^2 = 1$$

$$b = \frac{4}{T} - c\frac{T}{4}$$

$$x(t) = \left(\frac{4}{T} - c\frac{T}{4}\right)t + ct^2$$

$$\dot{x}(t) = \frac{4}{T} - c\frac{T}{4} + 2ct$$

$$\boxed{\tau \equiv \frac{T}{4}}$$

$$\frac{2}{m} S_{T/4} = \int_0^{T/4} dt \left\{ \left[\frac{1}{\tau} - c\tau + 2ct \right]^2 - \omega^2 t^2 \left[\frac{1}{\tau} - c\tau + ct \right]^2 \right\}$$

$$= \int_0^{\tau} dt \left\{ \left(\frac{1}{\tau} - c\tau \right)^2 + 4c \left(\frac{1}{\tau} - c\tau \right) t + 4c^2 t^2 \right.$$
$$\left. - \omega^2 t^2 \left(\frac{1}{\tau} - c\tau \right)^2 - \omega^2 \cdot 2ct^3 \left(\frac{1}{\tau} - c\tau \right) - \omega^2 c^2 t^4 \right\}$$

$$= \left(\frac{1}{\tau} - c\tau \right)^2 \tau + 4c \left(\frac{1}{\tau} - c\tau \right) \frac{\tau^2}{2} + 4c^2 \frac{\tau^3}{3} - \omega^2 \left(\frac{1}{\tau} - c\tau \right)^2 \frac{\tau^3}{3}$$
$$- 2\omega^2 c \left(\frac{1}{\tau} - c\tau \right) \frac{\tau^4}{4} - \omega^2 c^2 \frac{\tau^5}{5}$$

$$= \frac{1}{\tau} \cancel{- 2c\tau} + c^2\tau^3 \cancel{+ 2c\tau} - 2c^2\tau^3 + \frac{4}{3} c^2 \tau^3$$
$$- \omega^2 \frac{\tau}{3} + \frac{2}{3} c \omega^2 \tau^3 - \omega^2 c^2 \frac{\tau^5}{3} - \omega^2 c \frac{\tau^3}{2} + \omega^2 c^2 \frac{\tau^5}{2} - \omega^2 c^2 \frac{\tau^5}{5}$$

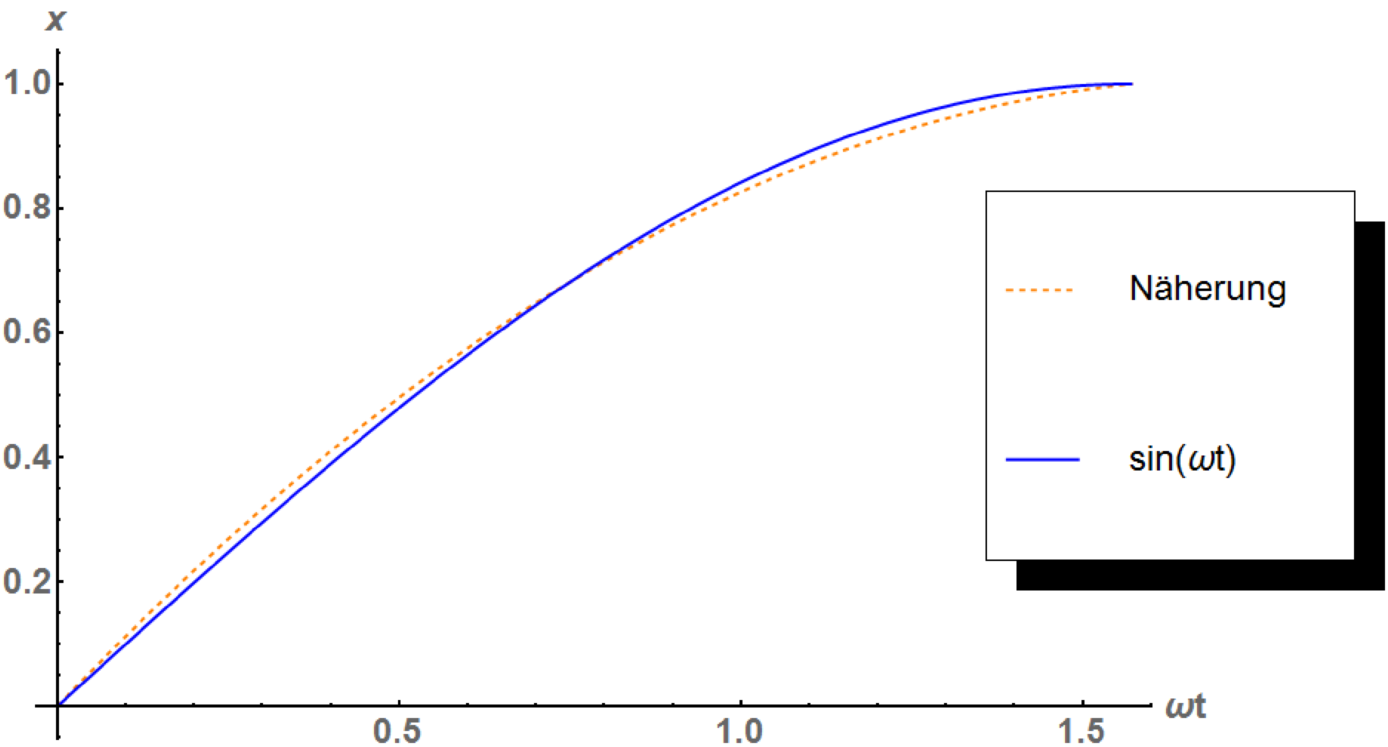
$$= \frac{1}{\tau} + \frac{1}{3} c^2 \tau^3 - \frac{1}{3} \omega^2 \tau + \frac{1}{6} c \omega^2 \tau^3 - \frac{1}{30} \omega^2 c^2 \tau^5$$

$$\frac{d}{dc} S_{T/4} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{2}{3} c\tau^3 - \frac{1}{15} \omega^2 c \tau^5 + \frac{1}{6} \omega^2 \tau^3 = 0$$

$$c = \frac{-\omega^2/6}{\frac{2}{3} - \frac{1}{15}\omega^2\tau^2} = - \frac{\omega^2/6}{\frac{2}{3} - \frac{\pi^2}{60}} \qquad \omega\tau = \omega \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}$$

$$b = \frac{1}{\tau} - c\tau = \frac{1}{\tau}(1 - c\tau^2) = \frac{2\omega}{\pi} \left(1 + \frac{\pi^2/24}{\frac{2}{3} - \frac{\pi^2}{60}} \right) = \frac{2\omega}{\pi} \frac{\frac{2}{3} + \frac{\pi^2}{40}}{\frac{2}{3} - \frac{\pi^2}{60}}$$

$$x(t) = bt + ct^2 = \frac{2\omega}{\pi} t \cdot \frac{\frac{2}{3} + \frac{\pi^2}{40}}{\frac{2}{3} - \frac{\pi^2}{60}} - \frac{\omega^2 t^2}{6} \frac{1}{\frac{2}{3} - \frac{\pi^2}{60}}$$



$\mathbf{t \to 0:} \quad \sin(\omega t) \simeq \omega t - \frac{(\omega t)^3}{6}$

$$x(t) \simeq \frac{2}{\pi}\frac{\frac{2}{3}+\frac{\pi^2}{40}}{\frac{2}{3}-\frac{\pi^2}{60}}\omega t \approx 1.158\,\omega t \;>\; \sin(\omega t)$$

$\mathbf{t \to T/4:} \quad \sin(\omega t) \simeq 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\omega t\right)^2$

$$\frac{2}{\pi}\frac{\frac{2}{3}+\frac{\pi^2}{40}}{\frac{2}{3}-\frac{\pi^2}{60}}\omega t - \frac{(\omega t)^2}{6}\frac{1}{\frac{2}{3}-\frac{\pi^2}{60}} \to 1 - \frac{(80-7\pi^2)\left(\frac{\pi}{2}-\omega t\right)}{\pi(40-\pi^2)} - \frac{10\left(\frac{\pi}{2}-\omega t\right)^2}{40-\pi^2}$$

$$x(t) \simeq 1 - 0.115\left(\frac{\pi}{2}-\omega t\right) - 0.332\left(\frac{\pi}{2}-\omega t\right)^2 \;<\; \sin(\omega t)$$