Klassische Theoretische Physik II (Theorie B) Sommersemester 2016

Prof. Dr. Alexander Mirlin
PD Dr. Igor Gornyi, Nikolaos Kainaris

Blatt 10. Abgabe: 24.06.2016
Besprechung: 28.06.2016

---

1. Trägheitstensor (3+4+5=12 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie den Trägheitstensor Θ_{ik} eines starren Körpers kennengelernt, der in der diskreten Fassung in einem gegebenen Koordinatensystem wie folgt gegeben ist (die Summe erstreckt sich dabei über alle Massepunkte):

$$\Theta_{ik} = \sum_n m_n \left(\vec{r}_n^{\,2} \delta_{ik} - (x_n)_i (x_n)_k \right) \; .$$

(a) Wie aus der Vorlesung bekannt ist, kann man eine orthogonale Matrix α so wählen, dass $\Theta' = \alpha^T \Theta \alpha = \mathrm{diag}(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)$ diagonal ist. Beweisen Sie, dass die Spur des Trägheitstensors unter dieser Transformation invariant ist: $\mathrm{Sp}\Theta = \mathrm{Sp}\Theta'$. Zeigen Sie zudem, dass die folgende Ungleichung für die Hauptträgheitsmomente gilt:

$$\Theta_i + \Theta_j \geq \Theta_k \qquad i \neq j \neq k = 1, 2, 3\,.$$

(b) Sei ein Trägheitstensor Θ_{ik} eines starren Körpers in einem körperfesten Koordinatensystem gegeben, dessen Ursprung gleich dem Schwerpunkt ist. Betrachten Sie den Trägheitstensor $\tilde{\Theta}_{ik}$ dieses starren Körpers in einem um einen konstanten Vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$ verschobenen Koordinatensystem. Beweisen Sie die folgende Beziehung:

$$\tilde{\Theta}_{ik} = \Theta_{ik} + (\vec{a}^{\,2} \delta_{ik} - a_i a_k) \sum_n m_n .$$

Diese Beziehung wird auch als *Steinerscher Satz* bezeichnet.

(c) Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente (bezüglich des Schwerpunktes) des dreiatomigen Moleküls in Form eines gleichschenkligen Dreiecks. Das Molekül wird hier betrachtet als ein System von zwei Teilchen der Masse m_1 und ein Teilchen der Masse m_2, die sich in konstanten Abständen a und b voneinander befinden (s. Abb. 1).

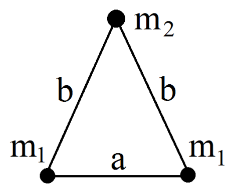

Abbildung 1.

2. Trägheitstensor einer quadratischen Anordnung von Punktmassen (4+6+4=14 Punkte)

Betrachten Sie die in Abb. 2 abgebildete Anordnung von Punktmassen $m \neq M$ in der x-y-Ebene. Die masselosen starren Verbindungsstangen haben die Länge a.

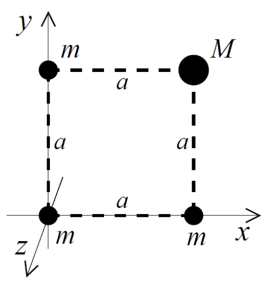

Abbildung 2.

(a) Berechnen Sie die Komponenten $\tilde{\Theta}_{ik}$ des Trägheitstensors bezüglich des Ursprungs ($x = y = z = 0$). Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $\tilde{\Theta}$.

(b) Finden Sie die normierten Eigenvektoren (Hauptachsen) der Matrix $\tilde{\Theta}$. Bestimmen Sie die Transformationsmatrix α, welche die Koordinatenachsen $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ in die Eigenbasis des Trägheitstensors $\tilde{\Theta}$ transformiert.

(c) Bestimmen Sie den Trägsheitstensor Θ bezüglich des Schwerpunktes für den Fall $M = m$ mithilfe des Steinerschen Satzes aus Aufgabe 1(b). Geben Sie die Hauptträgheitsmomente $\Theta_1\,, \Theta_2\,, \Theta_3$ des Körpers an.

3. Trägheitstensor eines Würfels

(7+3+4=14 Punkte)

Betrachten Sie den in Abb. 3 dargestellten Würfel mit Masse m und Kantenlänge a. Die kontinuierliche Massenverteilung sei homogen innerhalb des Würfels.

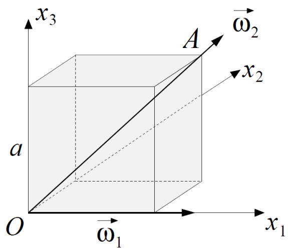

Abbildung 3.

(a) Berechnen Sie den Trägheitstensor des Würfels bezüglich des Ursprungs. Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente des Würfels und geben Sie die zugehörigen Hauptträgheitsachsen an.

(b) Der Würfel rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_1$ um die x_1-Achse (s. Abb. 3). Bestimmen Sie den Drehimpuls $\vec{L}_{\text{rot}}$ des Würfels.

(c) Der Würfel rotiere nun mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_2$ um seine Hauptdiagonale (OA, s. Abb. 3). Bestimmen Sie den Drehimpuls $\vec{L}_{\text{rot}}$ und die Energie T_{rot} der Rotation?

4. Bonusaufgabe

(3+6+6=15 Bonuspunkte)

Ein dreiatomiges Molekül besteht aus drei verschiedenen Atomen mit den Massen m_1, m_2 und m_3, die ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge l bilden (die Atome werden als Punktteilchen betrachtet).

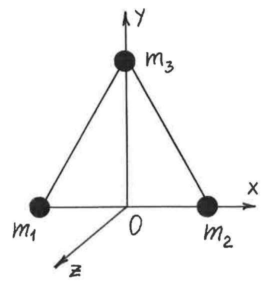

Abbildung 4.

(a) Wählen Sie zunächst ein Koordinatensystem, dessen Nullpunkt O in der Mitte einer Seite des Dreiecks liegt (s. Abb. 4), und berechnen Sie den Trägheitstensor $\tilde{\Theta}$ bezüglich dieses Systems.

(b) Finden Sie die Koordinaten des Schwerpunktes und transformieren Sie den Trägheitstensor ins Koordinatensystem mit Nullpunkt im Schwerpunkt: $\tilde{\Theta} \to \Theta$.

(c) Diagonalisieren Sie jetzt den Tensor Θ und finden Sie damit die Hauptträgheitsmomente (bezüglich des Schwerpunktes) des Moleküls.