KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE

INSTITUT FÜR THEORIE DER KONDENSIERTEN MATERIE

Klassische Theoretische Physik II (Theorie B) **Sommersemester 2016**

Prof. Dr. Alexander Mirlin

PD Dr. Igor Gornyi, Nikolaos Kainaris

Musterlösung: Blatt 10.

Besprechung: 28.06.2016

---

1. Trägheitstensor (3+4+5=12 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie den Trägheitstensor Θ_{ik} eines starren Körpers kennengelernt, der in der diskreten Fassung in einem gegebenen Koordinatensystem wie folgt gegeben ist (die Summe erstreckt sich dabei über alle Massepunkte):

$$\Theta_{ik} = \sum_n m_n \left(\vec{r}_n^{\,2} \delta_{ik} - (x_n)_i (x_n)_k \right) .$$

(a) Wie aus der Vorlesung bekannt ist, kann man eine orthogonale Matrix α so wählen, dass $\Theta' = \alpha^T \Theta \alpha = \mathrm{diag}(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)$ diagonal ist. Beweisen Sie, dass die Spur des Trägheitstensors unter dieser Transformation invariant ist: $\mathrm{Sp}\Theta = \mathrm{Sp}\Theta'$. Zeigen Sie zudem, dass die folgende Ungleichung für die Hauptträgheitsmomente gilt:

$$\Theta_i + \Theta_j \geq \Theta_k \qquad i \neq j \neq k = 1, 2, 3 \,.$$

Lösung:

Mit $\alpha\alpha^T = 1$ und zyklischer Vertauschung unter der Spur gilt:

$$\mathrm{Sp}\,(\Theta) = \mathrm{Sp}\left(\Theta \alpha \alpha^T\right) = \mathrm{Sp}\left(\alpha^T \Theta \alpha\right) = \mathrm{Sp}\,(\Theta') \,.$$

Mit $(x'_n)_1 = x'_n$, $(x'_n)_2 = y'_n$ und $(x'_n)_3 = z'_n$ gilt

$$\begin{aligned} \Theta' &= \mathrm{diag}(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3) \\ &= \begin{pmatrix} \sum_n m_n \left[(\vec{r}_n')^2 - (x'_n)^2\right] & 0 & 0 \\ 0 & \sum_n m_n \left[(\vec{r}_n')^2 - (y'_n)^2\right] & 0 \\ 0 & 0 & \sum_n m_n \left[(\vec{r}_n')^2 - (z'_n)^2\right] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_n m_n \left[(y'_n)^2 + (z'_n)^2\right] & 0 & 0 \\ 0 & \sum_n m_n \left[(x'_n)^2 + (z'_n)^2\right] & 0 \\ 0 & 0 & \sum_n m_n \left[(x'_n)^2 + (y'_n)^2\right] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\Theta_1 + \Theta_2 = \sum_n m_n \left[(x'_n)^2 + (y'_n)^2 + 2(z'_n)^2 \right] \geq \sum_n m_n ((x'_n)^2 + (y'_n)^2) = \Theta_3 \,.$$

Die anderen Komponenten zeigt man analog.

(b) Sei ein Trägheitstensor Θ_{ik} eines starren Körpers in einem körperfesten Koordinatensystem gegeben, dessen Ursprung gleich dem Schwerpunkt ist. Betrachten Sie den Trägheitstensor $\tilde{\Theta}_{ik}$ dieses starren Körpers in einem um einen konstanten Vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$ verschobenen Koordinatensystem. Beweisen Sie die folgende Beziehung:

$$\tilde{\Theta}_{ik} = \Theta_{ik} + (\vec{a}^{\,2}\delta_{ik} - a_i a_k)\sum_n m_n.$$

Diese Beziehung wird auch als *Steinerscher Satz* bezeichnet.

Lösung:

Wir setzen $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{a}$. Setzt man dies ein und verwendet, dass gilt $\sum_n m_n \vec{r}_n = 0$ bzw. $\sum_n m_n (x_n)_i = 0$ (jede Komponente des Schwerpunktes verschwindet), so folgt

$$\begin{aligned}
\tilde{\Theta}_{ik} &= \sum_n m_n \left[(\vec{r}\,')^2_n \delta_{ik} - (x_n{}')_i (x_n{}')_k\right] \\
&= \sum_n m_n \left\{(\vec{r}_n - \vec{a})^2 \delta_{ik} - [(x_n)_i - a_i][(x_n)_k - a_k]\right\} \\
&= \sum_n m_n \left[\vec{r}_n^{\,2} \delta_{ik} - (x_n)_i (x_n)_k\right] + \left(\sum_n m_n\right)(\vec{a}^{\,2}\delta_{ik} - a_i a_k) \\
&= \Theta_{ik} + (\vec{a}^{\,2}\delta_{ik} - a_i a_k)\sum_n m_n.
\end{aligned}$$

(c) Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente (bezüglich des Schwerpunktes) des dreiatomigen Moleküls in Form eines gleichschenkligen Dreiecks. Das Molekül wird hier betrachtet als ein System von zwei Teilchen der Masse m_1 und ein Teilchen der Masse m_2, die sich in konstanten Abständen a und b voneinander befinden (s. Abb. 1).

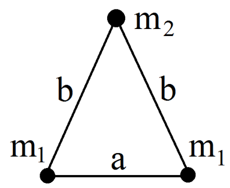
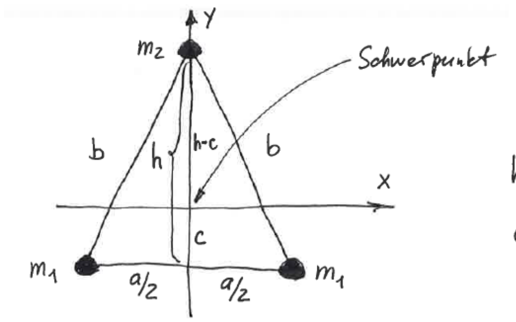


Abbildung 1.

Lösung:



$$h = \sqrt{b^2 - a^2/4} \qquad h - c = h\,\frac{2m_1}{m_2 + 2m_1}$$

$$c = h\,\frac{m_2}{m_2 + 2m_1}$$

Mit $x_n = (x_n)_1$, $y_n = (x_n)_2$ und $z_n = (x_n)_3$ schreiben wir:

$$\begin{aligned}
\Theta_{11} &= \sum_{n=1,2,3} m_n \left[\vec{r}_n^{\,2} - (x_n)_1 (x_n)_1\right] = \sum_{n=1,2,3} m_n \Big[y_n^2 + \underbrace{z_n^2}_{=0}\Big] = 2m_1 c^2 + m_2 (h-c)^2 \\
&= h^2 \left[2m_1 \left(\frac{m_2}{m_2 + 2m_1}\right)^2 + m_2 \left(\frac{2m_1}{m_2 + 2m_1}\right)^2\right] = \left(b^2 - \frac{a^2}{4}\right)\frac{2m_1 m_2}{m_2 + 2m_1}, \\
\Theta_{22} &= \sum_{n=1,2,3} m_n \Big[x_n^2 + \underbrace{z_n^2}_{=0}\Big] = 2m_1 \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{m_1 a^2}{2}, \\
\Theta_{33} &= \sum_{n=1,2,3} m_n \Big[x_n^2 + y_n^2\Big] = \Theta_{11} + \Theta_{22} = a^2 \frac{m_1^2}{m_2 + 2m_1} + b^2 \frac{2m_1 m_2}{m_2 + 2m_1}.
\end{aligned}$$

$$\Theta_{13} = \Theta_{23} = 0 \qquad (\text{weil } z_n = 0), \qquad \Theta_{12} = 0 \qquad (\text{Symmetrie } x \to -x).$$

$\Rightarrow \quad \Theta_{11}, \Theta_{22}, \Theta_{33}$ – Hauptträgheitsmomente bezüglich des Schwerpunktes.

2. Trägheitstensor einer quadratischen Anordnung von Punktmassen

(4+6+4=14 Punkte)

Betrachten Sie die in Abb. 2 abgebildete Anordnung von Punktmassen $m \neq M$ in der x-y-Ebene. Die masselosen starren Verbindungsstangen haben die Länge a.

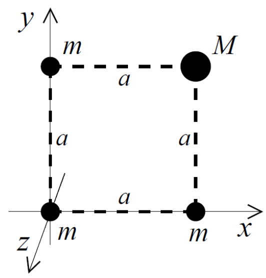


Abbildung 2.

(a) Berechnen Sie die Komponenten $\tilde{\Theta}_{ik}$ des Trägheitstensors bezüglich des Ursprungs ($x = y = z = 0$). Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $\tilde{\Theta}$.

Lösung:

Da $z_n = 0$, haben wir für die Komponenten des Trägheitstensors $\tilde{\Theta}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Theta}_{11} &= \sum_{n=1,2,3,4} m_n y_n^2, \quad \tilde{\Theta}_{22} = \sum_{n=1,2,3,4} m_n x_n^2, \quad \tilde{\Theta}_{33} = \tilde{\Theta}_{11} + \tilde{\Theta}_{22}, \\
\tilde{\Theta}_{12} &= -\sum_{n=1,2,3,4} m_n x_n y_n, \quad \tilde{\Theta}_{21} = -\sum_{n=1,2,3,4} m_n y_n x_n = \tilde{\Theta}_{12}, \\
\tilde{\Theta}_{13} &= \tilde{\Theta}_{23} = 0.
\end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{\Theta}_{11} &= (m+M)a^2 \\
\tilde{\Theta}_{22} &= (m+M)a^2 \\
\tilde{\Theta}_{33} &= 2(m+M)a^2 \\
\tilde{\Theta}_{12} &= \tilde{\Theta}_{21} = -Ma^2 \\
\tilde{\Theta}_{13} &= \tilde{\Theta}_{23} = 0
\end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\Theta} = \begin{pmatrix} (m+M)a^2 & -Ma^2 & 0 \\ -Ma^2 & (m+M)a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(m+M)a^2 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte ($\hat{I}$ – Einheitsmatrix):

$$\det(\tilde{\Theta} - \tilde{\Theta}_i \hat{I}) = 0 \quad \Rightarrow \quad [2(m+M)a^2 - \tilde{\Theta}_i]\left[\,((m+M)a^2 - \tilde{\Theta}_i)^2 - (Ma^2)^2\,\right] = 0.$$

Daraus folgt

$$\boxed{\tilde{\Theta}_3 = 2(m+M)a^2} \quad \text{und} \quad ((m+M)a^2 - \Theta_i)^2 - (Ma^2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\tilde{\Theta}_1 = ma^2, \qquad \tilde{\Theta}_2 = (m+2M)a^2}$$

(b) Finden Sie die normierten Eigenvektoren (Hauptachsen) der Matrix $\tilde{\Theta}$. Bestimmen Sie die Transformationsmatrix α, welche die Koordinatenachsen $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ in die Eigenbasis des Trägheitstensors $\tilde{\Theta}$ transformiert.

Lösung:

$\tilde{\Theta}_1 = ma^2 \quad \Rightarrow \quad$ zugehöriger Eigenvektor: $\tilde{\Theta}\omega^{(1)} = \tilde{\Theta}_1\omega^{(1)}$.

$$\text{Mit } \omega^{(1)} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} :$$

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{rcl} Mb_x - Mb_y &=& 0 \\ -Mb_x + Mb_y &=& 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad b_x = b_y \\ (m+2M)b_z = 0 \qquad \Rightarrow \quad b_z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \omega^{(1)} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit der freien Konstante $c_1 \equiv b_y$.
$\tilde{\Theta}_2 = (m+2M)a^2 \quad \Rightarrow \quad$ zugehöriger Eigenvektor: $\tilde{\Theta}\omega^{(2)} = \tilde{\Theta}_2\omega^{(2)}$.

$$\text{Mit } \omega^{(2)} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} :$$

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{rcl} -Mb_x - Mb_y &=& 0 \\ -Mb_x - Mb_y &=& 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad b_x = -b_y \\ mb_z = 0 \qquad \Rightarrow \quad b_z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \omega^{(2)} = c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit der freien Konstante $c_2 \equiv b_y$.
$\tilde{\Theta}_3 = 2(m+M)a^2 \quad \Rightarrow \quad$ zugehöriger Eigenvektor: $\tilde{\Theta}\omega^{(3)} = \tilde{\Theta}_3\omega^{(3)}$.

$$\text{Mit } \omega^{(3)} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} :$$

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{rcl} -(m+M)b_x - Mb_y &=& 0 \\ -Mb_x - (m+M)b_y &=& 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad b_x = b_y = 0 \\ 0\, b_z = 0 \qquad \Rightarrow \quad b_z = \text{beliebig} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \omega^{(3)} = c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit der freien Konstante $c_3 \equiv b_z$.

Die Konstanten c_j werden jetzt so bestimmt, dass die Eigenvektoren normiert sind (Einheitsvektoren), $|\omega^{(j)}| = 1$, und es ergibt sich schließlich

$$\boxed{\begin{array}{lllllllll} \tilde{\Theta}_1 &=& ma^2 & \tilde{\Theta}_2 &=& (m+2M)a^2 & \tilde{\Theta}_3 &=& (2m+2M)a^2 \\ \omega^{(1)} &=& \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \omega^{(2)} &=& \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \omega^{(3)} &=& \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}}$$

Die Transformationsmatrix lautet

$$\boxed{\alpha^T = (\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \omega^{(3)}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

(c) Bestimmen Sie den Trägsheitstensor Θ bezüglich des Schwerpunktes für den Fall $M = m$ mithilfe des Steinerschen Satzes aus Aufgabe 1(b). Geben Sie die Hauptträgheitsmomente $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ des Körpers an.

Lösung:

Schwerpunkt im "alten" Koordinatensystem mit $M = m$:

$$\vec{R} = \frac{\sum_n m_n \vec{r}_n}{\sum_n m_n} = \frac{1}{4m}\left[ma\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + ma\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + ma\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right] = \frac{a}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Der Schwerpunktsvektor $\vec{R}$ ist parallel zur Hauptachse $\omega^{(1)}$. Wenn nun das Hauptachsensystem $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \omega^{(3)}$ in Richtung $\omega^{(1)}$ auf den Schwerpunkt verschoben wird, werden die Drehachsen $\omega^{(2)}$ und $\omega^{(3)}$ jeweils um $\vec{R}$ parallel verschoben, $\omega^{(1)}$ dagegen bleibt unverändert.

Der Satz von Steiner, rückwärts im Hauptachsensystem angewendet (mit $a^{(1)} = R$, $a^{(2)} = 0$, $a^{(3)} = 0$), führt dann auf

$$\begin{aligned}
\Theta_{11} &= \tilde{\Theta}_{11} - M_{\text{tot}}\{|\vec{R}|^2 - a^{(1)}a^{(1)}\} = \tilde{\Theta}_1, \\
\Theta_{22} &= \tilde{\Theta}_{22} - M_{\text{tot}}\{|\vec{R}|^2 - a^{(2)}a^{(2)}\} = \tilde{\Theta}_2 - M_{\text{tot}}|\vec{R}|^2, \\
\Theta_{33} &= \tilde{\Theta}_{22} - M_{\text{tot}}\{|\vec{R}|^2 - a^{(3)}a^{(3)}\} = \tilde{\Theta}_3 - M_{\text{tot}}|\vec{R}|^2, \\
i \neq k: &\Rightarrow \Theta_{ik} = \tilde{\Theta}_{ik} + M_{\text{tot}}a^{(i)}a^{(k)} = 0,
\end{aligned}$$

mit $M_{\text{tot}} = 4m$ und $|\vec{R}|^2 = a^2/2$ in unserem Fall. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Theta_1 &= \tilde{\Theta}_1, \\
\Theta_2 &= \tilde{\Theta}_2 - 4m\frac{a^2}{2}, \\
\Theta_3 &= \tilde{\Theta}_3 - 4m\frac{a^2}{2},
\end{aligned}$$

also

$$\boxed{\Theta_1 = ma^2, \quad \Theta_2 = ma^2, \quad \Theta_3 = 2ma^2}$$

Dies ergibt sich natürlich auch direkt, wenn man $M = m$ setzt und die Θ_{ij} mit dem Ursprung in der Mitte (Schwerpunkt) berechnet.

3. Trägheitstensor eines Würfels

(7+3+4=14 Punkte)

Betrachten Sie den in Abb. 3 dargestellten Würfel mit Masse m und Kantenlänge a. Die kontinuierliche Massenverteilung sei homogen innerhalb des Würfels.

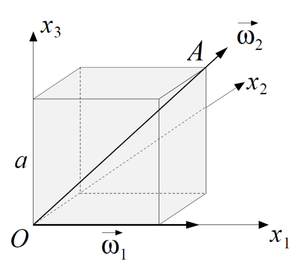


Abbildung 3.

(a) Berechnen Sie den Trägheitstensor des Würfels bezüglich des Ursprungs. Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente des Würfels und geben Sie die zugehörigen Hauptträgheitsachsen an.

Lösung:

Massendichte des Würfels:

$$\rho(\vec{x}) = \begin{cases} \dfrac{m}{a^3}, & 0 \leq x, y, z \leq a, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\Theta_{11} &= \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{x})\,(x_2^2+x_3^2)\,d^3x = \frac{m}{a^3}\int_0^a dx_1 \int_0^a dx_2 \int_0^a dx_3\,(x_2^2+x_3^2) \\
&= \frac{m}{a^3}\,a\,\frac{a^3}{3}\,a + \frac{m}{a^3}\,a\,a\,\frac{a^3}{3} = \frac{2ma^2}{3} = \Theta_{22} = \Theta_{33}.
\end{aligned}$$

Ebenso:

$$\begin{aligned}
\Theta_{12} &= -\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{x})\,x_1x_2\,d^3x = -\frac{m}{a^3}\int_0^a dx_1 \int_0^a dx_2 \int_0^a dx_3\,x_1x_2 \\
&= -\frac{m}{a^3}\,\frac{a^2}{2}\,\frac{a^2}{2}\,a = -\frac{ma^2}{4} = \Theta_{13} = \Theta_{23} = \Theta_{21} = \Theta_{31} = \Theta_{32}.
\end{aligned}$$

Also in Matrixform:

$$\Theta = (\Theta_{ij}) = \frac{ma^2}{12}\begin{pmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Eigenwerte von Θ liefern die Hauptträgheitsmomente Θ_i:

$$\det(\Theta - \lambda\,\hat{I}) = 0.$$

Mit dem Ansatz $\lambda = \theta ma^2/12$ erhalten wir

$$\det\left(\Theta - \frac{ma^2}{12}\theta\,\hat{I}\right) = -\frac{m^3a^6}{12^3}(\theta^3 - 24\theta^2 + 165\theta - 242) = (\theta-2)(\theta-11)^2 = 0,$$

also

$$\Theta_1 = \lambda_1 = \frac{ma^2}{6}, \quad \Theta_{2,3} = \lambda_{2,3} = \frac{11ma^2}{12}.$$

Hauptträgheitsachse zu Θ_1:

$$\Theta - \Theta_1\,\hat{I} = \frac{ma^2}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \omega^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad .$$

Hauptträgheitsachsen zu $\Theta_{2,3}$:

$$\Theta - \Theta_2\,\hat{I} = -\frac{ma^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

also zum Beispiel (für zusammenfallende Eigenwerte können die Eigenvektoren orthogonal gemacht werden):

$$\omega^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(b) Der Würfel rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_1$ um die x_1-Achse (s. Abb. 3). Bestimmen Sie den Drehimpuls $\vec{L}_{\text{rot}}$ des Würfels.

Lösung:

$\vec{\omega}_1 = (\omega_1, 0, 0)^T$, also

$$\vec{L}_{\text{rot}} = \Theta\,\vec{\omega}_1 = \frac{ma^2\omega_1}{12}\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Damit sind Drehimpuls und Rotationsachse nicht parallel zueinander.

(c) Der Würfel rotiere nun mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_2$ um seine Hauptdiagonale (OA, s. Abb. 3). Bestimmen Sie den Drehimpuls $\vec{L}_{\text{rot}}$ und die Energie T_{rot} der Rotation?

Lösung:

$$\vec{\omega}_2 = \frac{\omega_2}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \omega_2\omega^{(1)},$$

also

$$\vec{L}_{\text{rot}} = \Theta\,\vec{\omega}_2 = \Theta_1\,\vec{\omega}_2 = \frac{ma^2\omega_2}{6\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Drehimpuls und Rotationsachse sind parallel zueinander, da die Drehachse mit einer der Hauptachsen zusammenfällt.

Energie T_{rot}:

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\vec{\omega}_2\Theta\vec{\omega}_2 = \frac{m\omega_2^2 a^2}{12} = \frac{1}{2}\Theta_1\omega_2^2.$$

4. Bonusaufgabe

(3+6+6=15 Bonuspunkte)

Ein dreiatomiges Molekül besteht aus drei verschiedenen Atomen mit den Massen m_1, m_2 und m_3, die ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge l bilden (die Atome werden als Punktteilchen betrachtet).

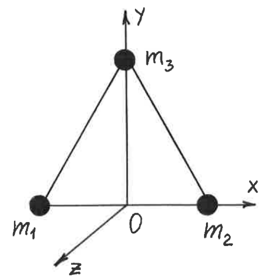


Abbildung 4.

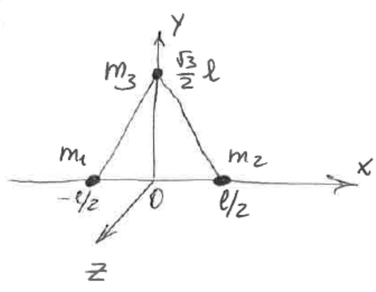
(a) Wählen Sie zunächst ein Koordinatensystem, dessen Nullpunkt O in der Mitte einer Seite des Dreiecks liegt (s. Abb. 4), und berechnen Sie den Trägheitstensor $\tilde{\Theta}$ bezüglich dieses Systems.

Lösung:

$$\tilde{\Theta}_{11} = \frac{3}{4}m_3 l^2, \quad \tilde{\Theta}_{22} = \frac{1}{4}(m_1 + m_2)l^2,$$

$$\tilde{\Theta}_{33} = \tilde{\Theta}_{11} + \tilde{\Theta}_{22} = \frac{1}{4}(m_1 + m_2 + 3m_3)l^2,$$

$$\tilde{\Theta}_{12} = \tilde{\Theta}_{13} + \tilde{\Theta}_{23} = 0.$$



(b) Finden Sie die Koordinaten des Schwerpunktes und transformieren Sie den Trägheitstensor ins Koordinatensystem mit Nullpunkt im Schwerpunkt: $\tilde{\Theta} \to \Theta$.
Steinerscher Satz: $\Theta_{ik} = \tilde{\Theta}_{ik} - (\vec{a}^2\delta_{ik} - a_i a_k)M$.

$M = m_1 + m_2 + m_3$

$\vec{a}$ – Koordinate des Schwerpunktes

$$a_x = \frac{l}{2M}(m_2 - m_1)$$
$$a_y = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{l}{M} m_3 \qquad \rightarrow \quad a = \frac{l}{2M}\left(m_2 - m_1,\ \sqrt{3}\, m_3\right)$$
$$a_z = 0$$

$$\Theta_{11} = \tilde{\Theta}_{11} - Ma_y^2 = \frac{l^2}{4}\left(3m_3 - \frac{3m_3^2}{M}\right) = \frac{l^2}{4M} 3m_3(m_1 + m_2),$$

$$\Theta_{22} = \tilde{\Theta}_{11} - Ma_x^2 = \frac{l^2}{4}\left[m_1 + m_2 - \frac{(m_2 - m_1)^2}{M}\right] = \frac{l^2}{4M}\left[(m_1 + m_2)m_3 + 4m_1 m_2\right],$$

$$\Theta_{33} = \Theta_{11} + \Theta_{22} = \frac{l^2}{M}(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3),$$

$$\Theta_{12} = \Theta_{21} = Ma_x a_y = \frac{l^2}{4M}(m_2 - m_1)\sqrt{3}m_3, \quad \Theta_{13} = \Theta_{23} = 0.$$

(c) Diagonalisieren Sie jetzt den Tensor Θ und finden Sie damit die Hauptträgheitsmomente (bezüglich des Schwerpunktes) des Moleküls.
Lösung:

$$\Theta = \frac{l^2}{4M}\begin{pmatrix} 3m_3(m_1 + m_2) & \sqrt{3}(m_2 - m_1)m_3 & 0 \\ \sqrt{3}(m_2 - m_1)m_3 & (m_1 + m_2)m_3 + 4m_1 m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 4(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{e}_3$ – eine Hauptachse, Θ_{33} – Hauptträgheitsmoment.

Um die zwei anderen zu finden diagonalisieren wir die 2×2-Matrix $\bar{\Theta} = \begin{pmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{pmatrix}$

$$det(\bar{\Theta} - \lambda\hat{I}) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{l^2}{4M}\tilde{\lambda}$$

$$\left[3m_3(m_1 + m_2) - \tilde{\lambda}\right]\left[(m_1 + m_2)m_3 + 4m_1 m_2 - \tilde{\lambda}\right] - 3(m_2 - m_1)^2 m_3^2 = 0$$

$$\tilde{\lambda}^2 - 4\tilde{\lambda}(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3) + 3m_3^2(m_1 + m_2)^2 + 12m_1 m_2 m_3(m_1 + m_2)$$
$$- 3m_3^2(m_2 - m_1)^2 = 0$$

$$\tilde{\lambda}^2 - 4\tilde{\lambda}(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3) + 12m_1 m_2 m_3(m_1 + m_2 + m_3) = 0$$

$$\tilde{\lambda}_{1,2} = 2(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3) \pm \sqrt{4(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3)^2 - 12m_1 m_2 m_3(m_1 + m_2 + m_3)}$$

$$
\begin{aligned}
\Theta_1 &= \frac{l^2}{2M}\left[(m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3)+\sqrt{(m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3)^2-3m_1m_2m_3M}\right] \\
&= \frac{l^2}{2M}\left[(m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3)+\sqrt{m_1^2m_2^2+m_1^2m_3^2+m_2^2m_3^2-m_1m_2m_3M}\right], \\
\Theta_2 &= \frac{l^2}{2M}\left[(m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3)-\sqrt{m_1^2m_2^2+m_1^2m_3^2+m_2^2m_3^2-m_1m_2m_3M}\right],
\end{aligned}
$$

$$
\Theta_3 = \Theta_{33} = \frac{l^2}{M}(m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3)
$$