Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Klassische Theoretische Physik II (Theorie B) **Sommersemester 2016**

Prof. Dr. Alexander Mirlin
PD Dr. Igor Gornyi, Nikolaos Kainaris

Blatt 13. Abgabe: 15.07.2016
Besprechung: 19.07.2016

---

1. Hamiltonfunktion (2+3+3=8 Punkte)

Schreiben Sie die Hamiltonfunktion und die kanonischen Bewegungsgleichungen für

(a) den gleitenden Massenpunkt auf einer Kugel (Aufgabe 3 von Blatt 2);

(b) das ebene Doppelpendel (Aufgabe 1 von Blatt 8);

(c) das Pendel mit bewegtem Aufhängepunkt (Aufgabe 2 von Blatt 8).

Allgemeine Vorbemerkungen.

Lagrangefunktion:

$$L(q,\dot{q},t), \quad q = \{q_i\},\ i = 1 \dots f.$$

Verallgemeinerte Impulse:

$$p_i = \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_i} \ \Rightarrow\ \dot{q}_k = \dot{q}_k(q,p,t).$$

Hamiltonfunktion:

$$H(q,p,t) = \sum_i \dot{q}_i(q,p,t)\ p_i - L(q,\dot{q}(q,p,t),t).$$

Wenn die Lagrangefunktion eine quadratische Form

$$L = \frac{1}{2}\sum_{ik} [\hat{m}(q)]_{ik}\ \dot{q}_i\dot{q}_k - U(q)$$

mit $m_{ik} = m_{ki}$ hat, ergibt sich die Hamiltonfunktion als

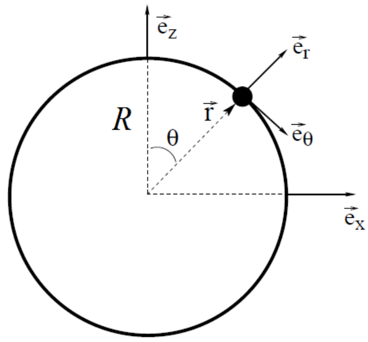
$$H = \frac{1}{2}\sum_{ik} \left[\hat{m}^{-1}(q)\right]_{ik}\ p_i p_k + U(q).$$

Kanonische Bewegungsgleichungen:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial q_i}.$$

Lösung:

(a) *Gleitender Massenpunkt auf einer Kugel (Aufgabe 3 von Blatt 2).*
Verallgemeinerte Koordinaten (s. Abbildung):



$$\theta \text{ und } r, \quad r = R \;\Rightarrow\; \dot{r} = 0.$$

Kinetische und potentielle Energie:

$$T = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 = \frac{m}{2}R^2\dot{\theta}^2, \qquad U = mgR\cos\theta.$$

Lagrangefunktion:

$$L = T - U = \frac{m}{2}R^2\dot{\theta}^2 - mgR\cos\theta.$$

Kanonischer Impuls:

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta} \;\Rightarrow\; \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2} \;\Rightarrow\; T = \frac{p_\theta^2}{2mR^2}.$$

Hamiltonfunktion:

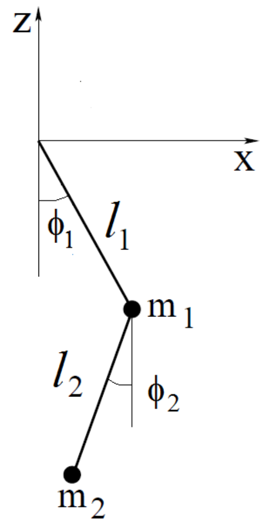
$$\begin{aligned} H(p,q,t) &= \dot{\theta}\, p_\theta - L = \frac{p_\theta^2}{mR^2} - \left(\frac{p_\theta^2}{2mR^2} - mgR\cos\theta\right) \\ &= \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + mgR\cos\theta = T + U. \end{aligned}$$

Kanonische Bewegungsgleichungen:

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2}, \quad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgR\sin\theta.$$

(b) *Das ebene Doppelpendel (Aufgabe 1 von Blatt 8).*
Verallgemeinerte Koordinaten (s. Abbildung): ϕ_1 und ϕ_2.
Lagrangefunktion:

$$\begin{aligned} L(\phi_1,\phi_2,\dot{\phi}_1,\dot{\phi}_2) &= \frac{m_1+m_2}{2}l_1^2\dot{\phi}_1^2 \\ &+ \frac{m_2}{2}\left[l_2^2\dot{\phi}_2^2 + 2l_1l_2\cos(\phi_1-\phi_2)\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\right] \\ &+ (m_1+m_2)gl_1\cos\phi_1 + m_2gl_2\cos\phi_2. \end{aligned}$$



Verallgemeinerte Impulse:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1} = (m_1+m_2)l_1^2\dot{\phi}_1 + m_2l_1l_2\cos(\phi_1-\phi_2)\dot{\phi}_2, \\ p_2 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_2} = m_2l_2^2\dot{\phi}_2 + m_2l_1l_2\cos(\phi_1-\phi_2)\dot{\phi}_1 \quad \Rightarrow \\ \dot{\phi}_1 &= \frac{p_1}{M(\phi_1,\phi_2)l_1^2} - \frac{p_2}{M(\phi_1,\phi_2)l_1l_2}\cos(\phi_1-\phi_2), \\ \dot{\phi}_2 &= \frac{(m_1+m_2)p_2}{m_2M(\phi_1,\phi_2)l_2^2} - \frac{p_1}{M(\phi_1,\phi_2)l_1l_2}\cos(\phi_1-\phi_2), \end{aligned}$$

mit

$$M(\phi_1,\phi_2) = m_1 + m_2\sin^2(\phi_1-\phi_2).$$

Hamiltonfunktion:

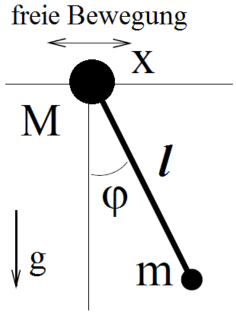
$$\begin{aligned} H(\phi_1,\phi_2,p_1,p_2) &= \frac{1}{2M(\phi_1,\phi_2)}\left[\frac{p_1^2}{l_1^2}+\frac{m_1+m_2}{m_2}\frac{p_2^2}{l_2^2}-2\frac{p_1}{l_1}\frac{p_2}{l_2}\cos(\phi_1-\phi_2)\right] \\ &- (m_1+m_2)gl_1\cos\phi_1 - m_2gl_2\cos\phi_2. \end{aligned}$$

Kanonische Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot\phi_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{1}{l_1[m_1+m_2\sin^2(\phi_1-\phi_2)]}\left[\frac{p_1}{l_1}-\frac{p_2}{l_2}\cos(\phi_1-\phi_2)\right], \\ \dot p_1 &= -\frac{\partial H}{\partial \phi_1} \\ &= \frac{m_2\sin(2\phi_1-2\phi_2)}{2[m_1+m_2\sin^2(\phi_1-\phi_2)]^2}\left[\frac{p_1^2}{l_1^2}+\frac{m_1+m_2}{m_2}\frac{p_2^2}{l_2^2}-2\frac{p_1}{l_1}\frac{p_2}{l_2}\cos(\phi_1-\phi_2)\right] \\ &- \frac{p_1p_2\sin(\phi_1-\phi_2)}{l_1l_2[m_1+m_2\sin^2(\phi_1-\phi_2)]} - (m_1+m_2)gl_1\sin\phi_1, \\ \dot\phi_2 &= \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{1}{l_2[m_1+m_2\sin^2(\phi_1-\phi_2)]}\left[\frac{m_1+m_2}{m_2}\frac{p_2}{l_2}-\frac{p_1}{l_1}\cos(\phi_1-\phi_2)\right], \\ \dot p_2 &= -\frac{\partial H}{\partial \phi_2} \\ &= -\frac{m_2\sin(2\phi_1-2\phi_2)}{2[m_1+m_2\sin^2(\phi_1-\phi_2)]^2}\left[\frac{p_1^2}{l_1^2}+\frac{m_1+m_2}{m_2}\frac{p_2^2}{l_2^2}-2\frac{p_1}{l_1}\frac{p_2}{l_2}\cos(\phi_1-\phi_2)\right] \\ &+ \frac{p_1p_2\sin(\phi_1-\phi_2)}{l_1l_2[m_1+m_2\sin^2(\phi_1-\phi_2)]} - m_2gl_2\sin\phi_2. \end{aligned}$$

(c) *Das Pendel mit bewegtem Aufhängepunkt (Aufgabe 2 von Blatt 8).*
Verallgemeinerte Koordinaten (s. Abbildung): x und φ.
Lagrangefunktion:

$$\begin{aligned} L(x,\varphi,\dot x,\dot\varphi) &= \frac{1}{2}\left[(M+m)\dot x^2+ml^2\dot\varphi^2+2ml\dot x\dot\varphi\cos\varphi\right] \\ &- \frac{1}{2}mgl(1-\cos\varphi). \end{aligned}$$



Verallgemeinerte Impulse:

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot x} = (M+m)\dot x + ml\dot\varphi\cos\varphi, \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = ml^2\dot\varphi + ml\dot x\cos\varphi \quad \Rightarrow \\ \dot x &= \frac{p_x}{\mu(\varphi)} - \frac{p_\varphi\cos\varphi}{\mu(\varphi)} \\ \dot\varphi &= \frac{(M+m)p_\varphi}{m\mu(\varphi)l^2} - \frac{p_x\cos\varphi}{\mu(\varphi)} \end{aligned}$$

mit

$$\mu(\varphi) = M + m\sin^2\varphi.$$

Hamiltonfunktion:

$$H = \frac{1}{2(M+m\sin^2\varphi)}\left[p_x^2 - 2p_x\frac{p_\varphi}{l}\cos\varphi + \frac{p_\varphi^2}{l^2}\frac{M+m}{m}\right] + mgl(1-\cos\varphi).$$

Kanonische Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{1}{M + m\sin^2\varphi}\left[p_x - \frac{p_\varphi}{l}\cos\varphi\right], \\
\dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \\
\dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{1}{(M + m\sin^2\varphi)l}\left[\frac{p_\varphi}{l}\frac{M+m}{m} - p_x\cos\varphi\right], \\
\dot{p}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} \\
&= \frac{m\sin(2\varphi)}{(M + m\sin^2\varphi)^2}\left[p_x^2 - 2p_x\frac{p_\varphi}{l}\cos\varphi + \frac{p_\varphi^2}{l^2}\frac{M+m}{m}\right] \\
&- \frac{p_x p_\varphi}{l(M + m\sin^2\varphi)}\sin\varphi - mgl\sin\varphi.
\end{aligned}$$

2. Poissonklammern (2+4+2=8 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Poissonklammern $\{\vec{p}, f(\vec{r})\}$ und $\{\vec{r}, f(\vec{p})\}$ für eine analytische skalare Funktion f.

Lösung:

Kartesische Koordinaten:

$$\begin{aligned}
\{\vec{p}, f(\vec{r})\} &= \sum_i \left(\frac{\partial \vec{p}}{\partial r_i}\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial p_i} - \frac{\partial \vec{p}}{\partial p_i}\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial r_i}\right) = -\sum_i \frac{\partial \vec{p}}{\partial p_i}\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial r_i} = -\sum_i \hat{e}_i \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial r_i} \\
&= -\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial \vec{r}} = -\vec{\nabla}_r f(\vec{r}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\vec{r}, f(\vec{p})\} &= \sum_i \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial r_i}\frac{\partial f(\vec{p})}{\partial p_i} - \frac{\partial \vec{r}}{\partial p_i}\frac{\partial f(\vec{p})}{\partial r_i}\right) = \sum_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial r_i}\frac{\partial f(\vec{p})}{\partial p_i} = \sum_i \hat{e}_i \frac{\partial f(\vec{p})}{\partial p_i} \\
&= \frac{\partial f(\vec{p})}{\partial \vec{p}} = \vec{\nabla}_p f(\vec{p}).
\end{aligned}$$

(b) Berechnen Sie die Poissonklammern $\{f_i, L_k\}$ (in kartesischen Koordinaten) für $f_i = x_i$, $f_i = p_i$ und $f_i = L_i$, wobei L_i die i-te Komponente des Drehimpulses bezeichnet. Zeigen Sie, dass sich alle Ergebnisse in der Form $\{f_i, L_k\} = \sum_l \epsilon_{ikl} f_l$ mit dem Levi-Civita-Tensor ϵ_{ijk} zusammenfassen lassen.

Lösung:

Wir benutzen

$$L_k = \sum_{lm} \epsilon_{klm} x_l p_m$$

und

$$\begin{aligned}
\{f, gh\} &= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial (gh)}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial (gh)}{\partial r_i}\right) \\
&= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}h + \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial h}{\partial p_i}g - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial r_i}h - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial r_i}g\right) \\
&= \{f, g\}h + \{f, h\}g \qquad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\{f, L_k\} &= \sum_{lm} \epsilon_{klm}\{f, x_l p_m\} = \sum_{lm} \epsilon_{klm} \left(\{f, x_l\}p_m + \{f, p_m\}x_l\right) \\
&= \sum_{lm} \epsilon_{klm} \left(-\frac{\partial f}{\partial p_l}\ p_m + \frac{\partial f}{\partial x_m}\ x_l\right)
\end{aligned}
$$

$f_i = x_i$:

$$
\begin{aligned}
\{x_i, L_k\} &= \sum_{lm} \epsilon_{klm} \left(-\frac{\partial x_i}{\partial p_l}\ p_m + \frac{\partial x_i}{\partial x_m}\ x_l\right) = \sum_{lm} \epsilon_{klm}\delta_{im}\ x_l = \sum_{l} \epsilon_{kli}\ x_l \\
&= \sum_{l} \epsilon_{ikl}\ x_l.
\end{aligned}
$$

$f_i = p_i$:

$$
\begin{aligned}
\{p_i, L_k\} &= \sum_{lm} \epsilon_{klm} \left(-\frac{\partial p_i}{\partial p_l}\ p_m + \frac{\partial p_i}{\partial x_m}\ x_l\right) = -\sum_{lm} \epsilon_{klm}\delta_{il}\ p_m = -\sum_{m} \epsilon_{kim}\ p_m \\
&= \sum_{l} \epsilon_{ikl}\ p_l.
\end{aligned}
$$

$f_i = L_i$:
Wir benutzen $\sum_j \epsilon_{jkl}\epsilon_{jmn} = \delta_{km}\delta_{ln} - \delta_{kn}\delta_{lm}$ (s. Aufgabe 2 von Blatt 0):

$$
\begin{aligned}
\{L_i, L_k\} &= \sum_{lm} \epsilon_{klm} \left(-\frac{\partial L_i}{\partial p_l}\ p_m + \frac{\partial L_i}{\partial x_m}\ x_l\right) \\
&= \sum_{lm} \epsilon_{klm} \left(-\sum_{jn} \epsilon_{ijn}\ x_j\ \frac{\partial p_n}{\partial p_l}\ p_m + \sum_{jn} \epsilon_{ijn} \frac{\partial x_j}{\partial x_m}\ p_n\ x_l\right) \\
&= \sum_{lm} \epsilon_{klm} \left(-\sum_{j} \epsilon_{ijl} x_j p_m + \sum_{n} \epsilon_{imn} p_n x_l\right) \\
&= -\sum_{jm} x_j p_m \sum_{l} \epsilon_{lmk}\epsilon_{lij} + \sum_{nl} p_n x_l \sum_{m} \epsilon_{mkl}\epsilon_{mni} \\
&= -\sum_{jm} x_j p_m (\delta_{im}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jm}) + \sum_{nl} p_n x_l (\delta_{kn}\delta_{il} - \delta_{ik}\delta_{ln}) \\
&= -x_k p_i + \delta_{ik} \sum_{j} x_j p_j + p_k x_i - \delta_{ik} \sum_{l} x_l p_l = x_i p_k - x_k p_i \\
&= \sum_{lm} x_l p_m (\delta_{il}\delta_{km} - \delta_{kl}\delta_{im}) = \sum_{lm} x_l p_m \sum_{j} \epsilon_{jik}\epsilon_{jlm} \\
&= \sum_{j} \epsilon_{ikj} \sum_{lm} \epsilon_{jlm} x_l p_m = \sum_{j} \epsilon_{ikj} L_j.
\end{aligned}
$$

(c) Zeigen Sie, dass die folgenden Poissonklammern alle identisch Null sind:

$$
\{L_i, r^2\}, \quad \{L_i, p^2\}, \quad \{L_i, \vec{p}\cdot\vec{r}\}, \quad \{L_i, L^2\}.
$$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
\{L_i, r^2\} &= \sum_{lm} \epsilon_{ilm} \left(\frac{\partial r^2}{\partial p_l}\, p_m - \frac{\partial r^2}{\partial x_m}\, x_l \right) \\
&= -\sum_{lm} \epsilon_{ilm} \frac{\partial r^2}{\partial x_m}\, x_l = -2 \sum_{lm} \epsilon_{ilm} x_m\, x_l = -2 \hat{e}_i \cdot [\vec{r} \times \vec{r}] = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\{L_i, p^2\} &= \sum_{lm} \epsilon_{ilm} \left(\frac{\partial p^2}{\partial p_l}\, p_m - \frac{\partial p^2}{\partial x_m}\, x_l \right) \\
&= \sum_{lm} \epsilon_{ilm} \frac{\partial p^2}{\partial p_l}\, p_m = 2 \sum_{lm} \epsilon_{ilm} p_l\, p_m = 2 \hat{e}_i \cdot [\vec{p} \times \vec{p}] = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\{L_i, (\vec{p} \cdot \vec{r})\} &= \sum_{lm} \epsilon_{ilm} \left(\frac{\partial (\vec{p} \cdot \vec{r})}{\partial p_l}\, p_m - \frac{\partial (\vec{p} \cdot \vec{r})}{\partial x_m}\, x_l \right) \\
&= \sum_{lm} \epsilon_{ilm} \left(x_l p_m - p_m x_l \right) = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\{L_i, L^2\} = \sum_k \{L_i, L_k^2\} = 2 \sum_k \{L_i, L_k\} L_k = -2 \sum_{jk} \epsilon_{ijk} L_j L_k = -2 \hat{e}_i [\vec{L} \times \vec{L}] = 0.
$$

3. Erhaltungsgrößen (2+2=4 Punkte)

Nehmen Sie an, dass ein System die folgenden Erhaltungsgrößen besitzt:

(a) p_x und L_z;

(b) L_x und L_z.

Finden Sie weitere Erhaltungsgrößen für jeden dieser beiden Fälle.

Lösung:

Poisson-Satz: Falls F und G Erhaltungsgrößen sind (d.h. $\{F, H\} = 0$ und $\{G, H\} = 0$ mit der Hamiltonfunktion H), dann ist auch $\{F, G\}$ eine Erhaltungsgröße.

(a): $F = p_x$ und $G = L_z \;\Rightarrow\; p_y$ – Erhaltungsgröße.

Aufgabe 2(b):

$$
\{p_x, L_z\} = \sum_l \epsilon_{xzl} p_l = -p_y.
$$

(b): $F = L_x$ und $G = L_z \;\Rightarrow\; L_y$ – Erhaltungsgröße:

Aufgabe 2(b):

$$
\{L_x, L_z\} = \sum_l \epsilon_{xzl} L_l = -L_y.
$$

Da L_x, L_y und L_z alle Erhaltungsgrößen sind, ist L^2 auch eine Erhaltungsgröße.

4. Bonusaufgabe zum Vorrechnen im Tutorium am 12. Juli

Betrachten Sie die Hamiltonfunktion eines Punktteilchens im eindimensionalen quadratischen Potential $U(x) = m\omega^2 x^2/2$. Führen Sie die Koordinaten

$$a = \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\omega}}, \quad a^* = \frac{m\omega x - ip}{\sqrt{2m\omega}}.$$

ein und drücken Sie die Hamiltonfunktion durch diese Koordinaten aus.
Zeigen Sie, dass für die Poissonklammer von a und a^* gilt

$$\{a, a^*\} = -i\,.$$

Geben Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen für $a(t)$ und $a^*(t)$ an.

Lösung:

Poissonklammer (wir benutzen $\{x,x\} = \{p,p\} = 0$ und $\{x,p\} = 1$):

$$\begin{aligned}
\{a, a^*\} &= \left\{\frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\omega}}, \frac{m\omega x - ip}{\sqrt{2m\omega}}\right\} \\
&= \frac{1}{2m\omega}\left(m\omega\{x, -ip\} + m\omega\{ip, x\}\right) = -i\{x,p\} = -i.
\end{aligned}$$

Die Hamiltonfunktion ist

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}.$$

Auflösen der angegebenen Beziehungens nach x und p

$$x = \frac{a + a^*}{\sqrt{2m\omega}}, \quad p = \sqrt{2m\omega}\,\frac{a - a^*}{2i}$$

ergibt die Hamiltonfunktion zu

$$H = -\frac{1}{2m}\,2m\omega\frac{(a - a^*)^2}{4} + \frac{m\omega^2}{2}\,\frac{(a + a^*)^2}{2m\omega} = \frac{\omega}{4}[(a + a^*)^2 - (a - a^*)^2] = \omega a^* a.$$

Die Bewegungsgleichungen findet man mittels der Beziehung

$$\dot{a}(t) = \{a(t), H\}.$$

Wir benutzen $\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$, $\{a, a^*\} = -i$, $\{a^*, a\} = i$ und

$$\begin{aligned}
\{a, a\} &= \left\{\frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\omega}}, \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\omega}}\right\} = \frac{1}{2m\omega}\left(m\omega\{x, ip\} + m\omega\{ip, x\}\right) = 0, \\
\{a^*, a^*\} &= 0.
\end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichungen sind dann durch

$$\begin{aligned}
\dot{a}(t) &= \{a(t), H\} = \omega\{a, a^* a\} = \omega\left(\{a, a\}a^* + \{a, a^*\}a\right) = -i\omega a(t), \\
\dot{a}^*(t) &= \omega\{a^*, a^* a\} = \omega\{a^*, a\}a^*(t) = i\omega a^*(t)
\end{aligned}$$

gegeben.

Die Lösung ist

$$a(t) = a_0 e^{-i\omega t}.$$