

Klassische Theoretische Physik II (Theorie B) Sommersemester 2016

Prof. Dr. Alexander Mirlin

Bonusblatt 14

PD Dr. Igor Gornyi, Nikolaos Kainaris Abgabe in den Tutorien am 19.07.2016

1. Kanonische Transformation

(2+4+4=10 Bonuspunkte)

- (a) Betrachten Sie die folgende kanonische Transformation: $\vec{P} = \vec{p}$, $\vec{Q} = \vec{q} - \vec{p}t/m$. Finden Sie die Hamiltonfunktion H' in den transformierten Koordinaten für ein freies Teilchen.
- (b) Für welche Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ist die Transformation $Q = q^\alpha p^\beta$, $P = q^\gamma p^\delta$ in einem System mit einem Freiheitsgrad ($f = 1$) kanonisch? Bestimmen Sie für diesen Fall die Erzeugende $F(q, Q)$.
- (c) Betrachten Sie einen eindimensionalen harmonischen Oszillator mit Masse m und Frequenz ω , auf den eine äußere Kraft $K(t)$ einwirkt. Gegeben ist die erzeugende Funktion

$$F(q, Q, t) = \frac{m\omega}{2} \left[q - \frac{K(t)}{m\omega^2} \right]^2 \cot Q.$$

Schreiben Sie die kanonische Transformation und die Bewegungsgleichungen in den transformierten Koordinaten auf.

2. Anharmonischer Oszillator

(1+3+4+2=10 Bonuspunkte)

Die Hamiltonfunktion eines anharmonischen Oszillators mit einer periodischen externen Kraft sei durch

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2 + b^2 q^4 + \kappa q \cos(\Omega t)$$

gegeben.

- (a) Zeigen Sie, dass die Transformation

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{\sqrt{m\omega}} [Q \cos(\Omega t) + P \sin(\Omega t)], \\ p &= \sqrt{m\omega} [-Q \sin(\Omega t) + P \cos(\Omega t)] \end{aligned}$$

kanonisch ist.

- (b) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion $F(q, Q, t)$ für diese Transformation.
- (c) Geben Sie die Hamiltonfunktion $H'(Q, P, t)$ in den neuen Koordinaten an.
- (d) Nehmen Sie an, dass die Frequenz der Kraft fast resonant ist: $0 < \delta \ll \omega$, wobei $\delta = \Omega - \omega$. Vernachlässigen Sie die nichtresonanten Terme mit Frequenzen 2Ω und 4Ω in $H'(Q, P, t)$. Schreiben Sie dann die Bewegungsgleichungen für Q und P auf. Was war der Vorteil der verwendeten Transformation?