Lagrangegleichungen 1. Art

(A) Gleichungen

- $$m_n \ddot{x}_n = F_n + \sum_{\mu=1}^{N_Z} \lambda_\mu \frac{\partial A_\mu(x_1, .. x_{3N}, t)}{\partial x_n} \qquad (1)$$

- $$A_\mu(x_1, ..., x_{3N}) = 0 \qquad (2)$$

$\rightsquigarrow$ $\mu = 1, .. N_Z$ # Zwangsbedingungen

$n = 1, .. 3N$ # Freiheitsgrade

$\rightsquigarrow$ $3N + N_Z$ Gleichungen für $3N + N_Z$ Unbekannte x_n, λ_μ

$\rightsquigarrow$ Notation $\vec{x} = (x_1, ..., x_{3N})$

(B) Lösungsvorgehen:

1. Formulierung der Zwangsbedingung
2. Aufstellen der Lagrangegl.
3. Elimination der λ_μ:

(i) $$\frac{d^2}{dt^2} A_\mu(\vec{x}, t) = \vec{\nabla} A_\mu \ddot{\vec{x}} + (\partial_t \vec{\nabla} A)_\mu \dot{\vec{x}} + \vec{\nabla} A_\mu \dot{\vec{x}}^2 + \partial_t^2 A_\mu \overset{(2)}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_n \frac{\partial A_\mu}{\partial x_n} \ddot{x}_n = \mathcal{A}_\mu(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$$

(ii) $\ddot{\vec{x}}$ aus (1) $\Rightarrow$ $$\sum_n \frac{\partial A_\mu}{\partial x_n} \frac{1}{m_n} \left(F_n + \sum_\mu \lambda_\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial x_n} \right) = \mathcal{A}_\mu$$

$\rightarrow$ Löse nach $\lambda_\mu(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$ auf.

↳

4. Lösung der Bewegungsgl.

5. Bestimmen der Integrationskonstanten

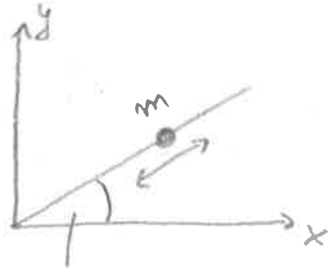
$\rightsquigarrow$ bestimmt durch Anfangsbedingungen und Zwangsbedingungen

6. Bestimmen der Zwangskräfte

- einsetzen von $\vec{x}, \dot{\vec{x}}$ aus 4. und λ_μ aus 3. in

$$Z_n(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \sum_\mu \lambda_\mu(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \frac{\partial A_\mu}{\partial x_n}$$

(C) Beispiel: Massepunkt auf rotierender Stange



$\varphi = \omega t$

⇝ Ignoriere z-Richtung, Bewegung nur in x-y-Ebene

⇝ Polarkoordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$

1. Masse auf Stange beschränkt: $A(\varphi, t) = \varphi - \omega t$

2. Bewegungsgl.

$$m \ddot{\vec{r}} = \lambda \vec{\nabla} A \quad , \quad \vec{r} = \rho(t)\, \vec{e}_\rho \qquad (3)$$

mit $\nabla = \vec{e}_\rho \partial_\rho + \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi \partial_\varphi$, $\ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi$

$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} A = \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi$

$$(3) \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} m \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 &= 0 \\ m \rho \ddot{\varphi} + 2m \dot{\rho} \dot{\varphi} &= \frac{\lambda}{\rho} \end{aligned} \qquad (4)$$

3. $d_t^2 A = \ddot{\varphi} \overset{!}{=} 0$,

einsetzen von $\ddot{\varphi}$ aus (4)

$$\frac{\lambda}{m\rho^2} - \frac{2}{\rho} \dot{\rho} \dot{\varphi} = 0 \iff \lambda = 2m\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} = \lambda(\rho, \dot{\rho}, \dot{\varphi}) \qquad (5)$$

4. (5) in (4) $\Rightarrow$ $m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\varphi}^2 = 0$

$$m\rho\ddot{\varphi} = 0 \qquad (6)$$

(i) triviale Lösung $\rho(t) = 0$

(ii) $\rho(t) \neq 0$ $\quad$ (6) $\Rightarrow$ $\ddot{\varphi} = 0$ $\rightsquigarrow$ $\varphi(t) = at + b$

in erste Gl. aus (6) $\Rightarrow$ $\ddot{\rho} - a^2\rho = 0$

Ansatz: $\rho(t) = A e^{kt}$ $\rightsquigarrow$ $k^2 - a^2 = 0 \rightsquigarrow k = \pm a$

Lösung: $\rho(t) = A e^{at} + B e^{-at}$

5. Zwangsbedingung: $\varphi(t) = \omega t$ $\Rightarrow$ $b = 0$, $a = \omega$

Anfangsbedingung: z.B. $\rho(t=0) = 0$

$\dot{\rho}(t=0) = v_0$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} A + B &= 0 \\ \omega(A - B) &= v_0 \end{aligned}\right\} \quad A = \frac{v_0}{2\omega} = -B$$

$$\Rightarrow \rho(t) = \frac{v_0}{\omega}\sinh(\omega t) \qquad (7)$$

Masse wird mit exponentiell wachsender Geschwindigkeit nach außen geschleudert

6. $\vec{Z} = \lambda \vec{\nabla} A \overset{(5)}{=} 2m\dot{\rho}\omega\,\vec{e}_\varphi$

$\overset{(7)}{=} 2mv_0\omega\cosh(\omega t)\,\vec{e}_\varphi$

$\rightsquigarrow$ Energie $E = m\dot{\vec{r}}^2$ nicht erhalten, da Zwangskraft von t abhängt $\partial_t A \neq 0$

$\rightarrow$ Energie von außen zu/abgeführt

$\rightsquigarrow$ Kraft auf Stange, $-\vec{Z}$, wird exponentiell groß für große t

$\rightsquigarrow$ reale Stange wird sich verbiegen + brechen.