Institut für Theoretische Teilchenphysik
Prof. Dr. U. Nierste, Dr. R. Ziegler, Simon Kast
https://www.ttp.kit.edu/∼ziegler/TheoB/TheoB.html

Klassische Theoretische Physik II

Übungsblatt 3

Sommersemester 2017

Abgabe: 11.5.2017
Besprechung: 16.5.2017

Aufgabe 5: Hebebühne

Der Azubi Franz Furchtlos bewegt sich auf einer Hebebühne im Schwerefeld der Erde, die Erdbeschleunigung ist $-g\vec{e}_z$. Die Hebebühne bewegt sich mit Geschwindigkeit[1]

$$\vec{v} = \begin{cases} (0,0,\alpha t(T-t))^T & \text{für} \quad 0 \leq t \leq T \\ (0,0,0)^T & \text{für} \quad t \leq 0 \quad \text{oder} \quad t \geq T. \end{cases}$$

mit $\alpha, T > 0$. Der Ortsvektor von Franz' Körperschwerpunkt sei $\vec{r} = (x,y,z)^T$, seine Masse sei m und die x- und y-Komponenten v_x und v_y seiner Geschwindigkeit seien konstant.
In den Teilaufgaben (a) bis (c) nehmen wir zudem $\alpha T \leq g$ an.

(a) Bestimmen Sie die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ zur Anfangsbedingung $\vec{r}(0) = 0$, $\dot{\vec{r}}(0) = (v_x, v_y, 0)^T$ und berechnen Sie $z(T)$. Schreiben Sie die Zwangsbedingung, das Franz auf der Hebebühne steht, in der Form $f(x,y,z,t) = 0$, d.h. bestimmen Sie f.

(2 Punkte)

(b) Bestimmen Sie die Beschleunigung $\ddot{\vec{r}}(t)$, stellen Sie die Newton'sche Kraftgleichung $m\ddot{\vec{r}}(t) = -mg\vec{e}_z + \vec{Z}$ auf und bestimmen Sie daraus im Intervall $0 \leq t \leq T$ die Zwangskraft $\vec{Z}(t)$, die die Hebebühne auf Franz ausübt. Überprüfen Sie, ob $\vec{Z} \propto \vec{\nabla} f$ ist, die Zwangskraft also senkrecht auf der durch die Zwangsbedingung definierten Fläche steht.

(2 Punkte)

(c) Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?
(i) $\vec{Z}$ verrichtet keine Arbeit.
(ii) $\vec{Z}$ verrichtet Arbeit an Franz.
Falls Sie sich für (ii) entscheiden, bestimmen Sie die Arbeit. Zeichnen Sie die Bahnkurve für $v_x > 0$, $v_y = 0$. Steht $\vec{Z}$ senkrecht auf der Bahnkurve?

(1 Punkte)

(d) Ab jetzt betrachten wir den Fall, dass die Hebebühne von Franz' misanthropischem Kollegen Max Mobber bedient wird, der $\alpha T > g$ wählt.
Bestimmen Sie den Zeitpunkt t_0 im Intervall $0 < t_0 < T$, mit $\vec{Z}(t_0) = 0$. Was passiert für $t > t_0$?.

(2 Punkte)

[1]Das an einem Vektor hochgestellte T bedeutet „transponiert“ und darf nicht mit der Zeit T verwechselt werden.

(e) Berechnen Sie den Zeitpunkt $t_1 > t_0$, zu dem Franz wieder auf der Hebebühne aufkommt. Unterscheiden Sie die Fälle $t_1 \leq T$ und $t_1 > T$.
Hinweise: Vergessen Sie nicht, dass sich die Hebebühne für $t_0 \leq t \leq T$ weiter bewegt. Es ist hilfreich, zunächst den Zeitpunkt zu berechnen, zu dem Franz den Scheitelpunkt seiner Bahn erreicht, und mit T zu vergleichen.

(3 Punkte)

Aufgabe 6: Laderampe

Die Fläche der sich schließenden Laderampe eines Lastwagens werde durch die Koordinaten (ξ, η) parametrisiert, wobei

$$\vec{r}_{\text{Rampe}}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \xi \cos(\omega t) \\ \eta \\ \xi \sin(\omega t) \end{pmatrix}, \qquad \omega > 0, \qquad 0 \leq \omega t \leq \frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

Auf der Laderampe liegt ein Stück nasser Seife mit Ortsvektor $\vec{r}(t)$ und $\vec{r}(0) = (x_0, 0, 0)^T$, wobei $x_0 > 0$ ist. Die Seife (mit Masse m) rutscht reibungsfrei im Schwerefeld der Erde $-g\vec{e}_z$ auf der Ladefläche. Wir beschreiben die Bewegung durch die verallgemeinerten Koordinaten $\xi(t)$ und $\eta(t)$.

(a) Bestimmen Sie die kinetische und potentielle Energie $T = m/2(\dot{\vec{r}})^2$ bzw. $V = mgz$ als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten ξ, η, bestimmen Sie die Lagrangefunktion $L = T - V$ und stellen Sie die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial L}{\partial \xi} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} - \frac{\partial L}{\partial \eta} = 0.$$

auf.

(2 Punkte)

(b) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für $\xi(t)$ und $\eta(t)$. Eliminieren Sie die Integrationskonstanten zu Gunsten der Anfangswerte $\xi(0) = x_0$, $\eta(0)$, $\dot{\xi}(0)$ und $\dot{\eta}(0)$.
Hinweis: Wie hängt die allgemeine Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung mit der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung zusammen?

(3 Punkte)

(c) Wir betrachten jetzt (nur in dieser Teilaufgabe) den Spezialfall einer sich langsam schließenden Klappe. Entwickeln Sie die Lösung aus (b) zur ersten Ordnung in ω und bestimmen Sie für $(\dot{\xi}(0), \dot{\eta}(0)) = (0, 0)$ den Zeitpunkt t_1, zu dem die Seife in den Lastwagen rutscht, also $\xi(t_1) = 0$ gilt?

(2 Punkte)

(d) Analog zu Aufgabe 5 könnte der Fall eintreten, dass sich die Seife vom Untergund löst bevor sie in den Lastwagen rutscht, die Zwangskraft also zu einem Zeitpunkt $t_0 < \frac{\pi}{2\omega}$ verschwindet und die Seife dann ballistisch in den Laderaum des Lastwagens fliegt. Geben Sie die Bedingungen dafür an, dass dieser Fall eintritt (dafür müssen Sie die Zwangskräfte ausrechnen). Berechnen Sie $\dot{\xi}(t_0)$; welches Vorzeichen finden Sie?

(3 Punkte)