Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Theoretische Teilchenphysik
Prof. Dr. U. Nierste, Dr. R. Ziegler, Simon Kast
https://www.ttp.kit.edu/courses/ss2017/theob/start

Klassische Theoretische Physik II

Übungsblatt 5

Sommersemester 2017

Abgabe: 26.5.2017
Besprechung: 30.5.2017

Aufgabe 9: Paketrutsche

Eine schraubenlinienförmige Paketrutsche mit Höhe h und Radius R werde durch

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} R\cos\phi \\ R\sin\phi \\ h\left(1 - \dfrac{\phi}{2\pi}\right) \end{pmatrix}, \qquad 0 \le \phi \le 2\pi \tag{1}$$

parametrisiert. Auf ein rutschendes Paket mit Masse m wirke die Schwerkraft $-mg\vec{e}_z$ und die Stokes'sche Reibungskraft $\vec{F}_R = -\alpha\dot{\vec{r}}$ mit $\alpha > 0$.

(a) Bestimmen Sie die generalisierte Kraft $Q = \vec{F}_R \cdot \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}$ als Funktion von ϕ und $\dot{\phi}$. Zeigen Sie, dass es kein geschwindigkeitsabhängiges Potential $U(\phi, \dot{\phi})$ mit $Q = -\dfrac{\partial U}{\partial \phi} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial U}{\partial \dot{\phi}}$ gibt.

(2 Punkte)

(b) Bestimmen Sie die Lagrange'sche Bewegungsgleichung $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \dfrac{\partial L}{\partial \phi} = Q$.

(2 Punkt)

(c) Lösen Sie die Bewegungsgleichung, um $\phi(t)$ zur Anfangsbedingung $\phi(0) = \dot{\phi}(0) = 0$ zu finden.

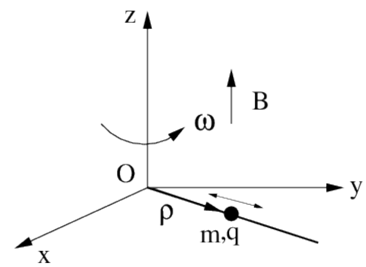
(2 Punkte)

(d) Betrachten Sie nun den Grenzfall $\alpha \to 0$. Welche Zwangskraft $\vec{Z}$ übt die Rutsche auf das Paket aus? Geben Sie das Ergebnis für $\vec{Z}$ als Funktion von ϕ an. Schreiben Sie $\vec{Z} = Z_\rho\vec{e}_\rho + Z_\phi\vec{e}_\phi + Z_z\vec{e}_z$ mit den Einheitsvektoren $\vec{e}_\rho = (\cos\phi, \sin\phi, 0)^T$, $\vec{e}_\phi = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)^T$ und $\vec{e}_z = (0, 0, 1)^T$ der Zylinderkoordinaten. Um die Paketrutsche stabil zu konstruieren, benötigt man das Maximum von $|\vec{Z}|$. Bei welchem ϕ wird es erreicht und welchen Wert hat das maximale $|\vec{Z}|$?

(4 Punkte)

Aufgabe 10: Elektrisch geladene Perle auf rotierendem Draht

Auf einem Draht, der sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse dreht, kann sich reibungsfrei in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = (0, 0, B)$ eine elektrisch geladene Perle der Masse m und Ladung q bewegen.



(a) Zeigen Sie, dass das in Zylinderkoordinaten gegebene Vektorfeld

$$\vec{A} = \frac{1}{2} B \rho \vec{e}_\phi$$

auf ein solches Magnetfeld führt.

(3 Punkte)

(b) Stellen Sie die Lagrangefunktion und die Lagrange'sche Bewegungsgleichung für ρ auf.

(3 Punkte)

(c) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für die Anfangsbedingungen $\rho(0) = l$ und $\dot{\rho}(0) = 0$.

(4 Punkte)

Hinweis: Die Rotation eines in Zylinderkoordinaten gegebenen Vektorfeldes

$$\vec{A} = A_\rho \vec{e}_\rho + A_\phi \vec{e}_\phi + A_z \vec{e}_z$$

hat die Form:

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\phi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \vec{e}_z \,.$$