Institut für Theoretische Teilchenphysik
Prof. Dr. U. Nierste, Dr. R. Ziegler, Simon Kast
https://www.ttp.kit.edu/courses/ss2017/theob/start

Klassische Theoretische Physik II

Übungsblatt 12

Sommersemester 2017

Abgabe: 13.7.2017
Besprechung: 18.7.2017

Aufgabe 23: Kräftefreier symmetrischer Kreisel (10 Punkte)

Der kräftefreie symmetrische Kreisel ist die klassische Anwendung der Eulerschen Gleichungen. Kräftefrei bedeutet, dass keine externen Kräfte angreifen, und ein symmetrischer Kreisel ist ein Objekt, das zwei gleiche Hauptträgheitsmomente besitzt. Das körperfeste Koordinatensystem wird dann in den Schwerpunkt gelegt, mit der $\vec{e}_3$-Achse in Richtung der Symmetrieachse, die anderen beiden Achsen $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ sind orthogonal dazu und beliebig orientiert. Die Hauptträgheitsmomente sind dann $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta$ und Θ_3.

(a) Stellen Sie die Eulerschen Bewegungsgleichungen auf und lösen Sie diese für die Komponenten ω_i der momentanen Drehachse $\vec{\omega}$ im körperfesten Koordinatensystem mit allgemeinen Anfangsbedingungen. Welche Bewegung beschreiben die Vektoren $\vec{\omega}_{\text{KS}}, \vec{L}_{\text{KS}}$ im körperfesten Koordinatensystem?

(5 Punkte)

(b) Betrachten Sie nun die Bewegung in einem raumfesten Koordinatensystem. Schreiben Sie dazu die Vektorgleichungen

$$\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{3} \omega_i \vec{e}_i(t)\,, \qquad \vec{L} = \sum_{i=1}^{3} L_i \vec{e}_i(t)\,,$$

mit den Komponenten ω_i, L_i im körperfesten Koordinatensystem, und finden Sie einen Zusammenhang zwischen $\vec{\omega}, \vec{L}, \vec{e}_3(t)$. Wie bewegen sich $\vec{\omega}$ und $\vec{e}_3$ um den (zeitlich konstanten) Vektor $\vec{L}$? Benutzen Sie dazu die Bewegungsgleichung für im körperfesten Koordinatensystem konstante Vektoren

$$\frac{d\vec{e}_3}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}_3\,.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 24: Schwerer symmetrischer Kreisel (10 Punkte)

Ein symmetrischer Kreisel liegt nun im Ursprung des raumfesten Koordinatensystems auf, und der Schwerpunkt bewegt sich unter dem Einfluss der Schwerkraft $\vec{F}_G = -Mg\vec{e}_z$, wobei M die Gesamtmasse ist (der Schwerpunkt hat den Abstand ℓ vom Auflagepunkt und ist im Bild mit CM bezeichnet). Der Kreisel dreht sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_3 um die Symmetrieachse $\vec{e}_3$ im körperfesten Koordinatensystem, und die Anfangsbedingungen sind so gewählt dass der Schwerpunkt auf einem Kreis um die raumfeste z-Achse $\vec{e}_z$ mit Winkelgeschwindigkeit Ω präzessiert und die Symmetrieachse $\vec{e}_3$ einen konstanten Winkel θ mit der z-Achse besitzt.

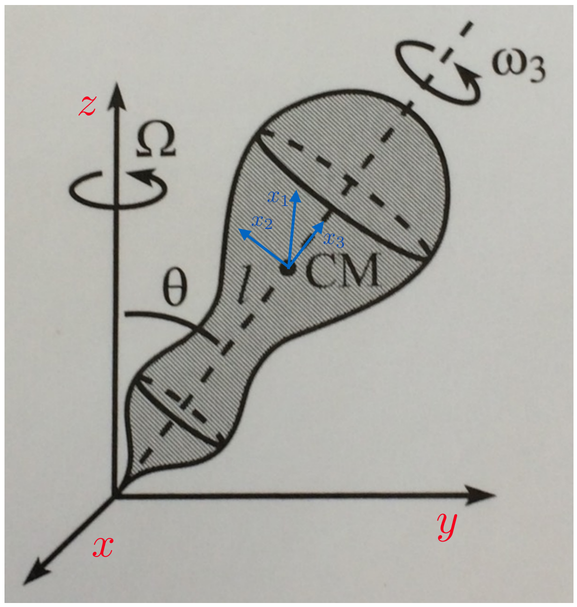

Abbildung 1: Die Basisvektoren $\vec{e}_z, \vec{e}_y, \vec{e}_3, \vec{e}_2$ liegen in derselben Ebene.

(a) Nehmen Sie an, dass der Drehimpuls der ω_3-Rotation der einzig relevante Beitrag zum Gesamtdrehimpuls ist und finden Sie in dieser Approximation einen Ausdruck für die Winkelgeschwindigkeit Ω, indem sie das Drehmoment berechnen und

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \Omega\vec{e}_z \times \vec{L}\,, \tag{1}$$

verwenden. Es genügt den Betrag dieser Vektorgleichung zu nehmen.

(5 Punkte)

(b) Leiten Sie nun einen Ausdruck für Ω her ohne eine Approximation zu machen. Stellen Sie zuerst die Beziehung der Basisvektoren $\vec{e}_y, \vec{e}_z$ im raumfesten System mit den Basisvektoren $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ im körperfesten System auf, dann benutzen Sie Gleichung (1) und $\vec{\omega} = \Omega\vec{e}_z + \tilde{\omega}\vec{e}_3$ (der erste Term ist die Präzession von $\vec{e}_3$ um $\vec{e}_z$, der zweite Term die Rotation des Körpers um $\vec{e}_3$) um eine quadratische Gleichung für Ω zu erhalten, die nur $M, g, \ell, \Theta, \Theta_3, \theta$ und ω_3 enthält. Verifizieren Sie, dass eine Lösung der Gleichung für große ω_3 das Resultat von Teilaufgabe (**a**) reproduziert.

(5 Punkte)


EULENFEST
der Fachschaft Physik
13.7.2017
Open Air am
Physik-Flachbau
Eintritt frei!
16:00 Prof-Cafe
19:00 Poetry-Slam
21:00 DJ