Institut für Theoretische Teilchenphysik
Prof. Dr. U. Nierste, Dr. R. Ziegler, Simon Kast
https://www.ttp.kit.edu/courses/ss2017/theob/start

Klassische Theoretische Physik II

Übungsblatt 13 (Übungsklausur)

Sommersemester 2017

keine Abgabe
Besprechung: Saalübung am 17.7.2017

Aufgabe 25: Panorama

In dieser Aufgabe geht es um allgemeines Physik-Verständnis, es sind nur wenige Rechenschritte nötig. L bezeichnet eine Lagrangefunktion mit geschwindigkeitsunabhängigem Potential, x_j, $j = 1, 2, 3$ sind kartesische Koordinaten.

(a) Die Lagrangefunktion eines Systems aus N Massenpunkten mit Massen m_k und Ortsvektoren $\vec{r}^{\,(k)} = (x_1^{(k)}, x_3^{(k)}, x_3^{(k)})^T$ sei invariant unter der infinitesimalen Transformation

$$x_1^{(k)} \to x_1^{(k)} - \epsilon x_2^{(k)}, \quad x_2^{(k)} \to x_2^{(k)} + \epsilon x_1^{(k)}, \quad x_3^{(k)} \to x_3^{(k)}, \quad t \to t.$$

(i) Berechnen Sie die zugehörige Erhaltungsgröße.
(ii)Welche physikalische Bedeutung hat sie?

(5 Punkte)

(b) Betrachten Sie $L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) - V(r)$ und geben Sie die Euler-Lagrangeschen Bewegungsgleichungen für die verallgemeinerten Koordinaten r und ϕ (ebene Polarkoordinaten) an.

(5 Punkte)

(c) (i) Welche Koordinate(n) in Teilaufgabe (b) ist/sind zyklisch?
(ii) Welche Erhaltungsgröße(n) gehört/gehören dazu?

(5 Punkte)

(d) Ein kräftefreier starrer Körper (z.B. ein Satellit) mit Trägheitstensor

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \theta_{22} & \theta_{23} \\ 0 & \theta_{23} & \theta_{22} \end{pmatrix}$$

rotiere mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und Drehimpuls $\vec{L} = (0, 0, L_3)^T$.
(i) Drücken Sie $\vec{\omega}$ durch L_3 und θ_{jk} aus.
(ii) Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente.
(iii) Ist für $\theta_{11} = \theta_{22}$ und $\theta_{23} \neq 0$ die Drehung um die x-Achse stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

(5 Punkte)

Aufgabe 26: Galilei-Transformation

Betrachten Sie ein System aus N Massenpunkten mit Lagrangefunktion

$$L(\vec{r}_k, \dot{\vec{r}}_k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k}{2} \dot{\vec{r}}_k^{\,2} - \sum_{j \neq l} V(\vec{r}_j - \vec{r}_l). \tag{1}$$

(a) Berechnen Sie, wie sich L unter einer infinitesimalen Transformation

$$\vec{r}_k \to \vec{r}_k{}' = \vec{r}_k + \epsilon \vec{w} t \qquad \text{für} \;\; k = 1, \dots N, \qquad\qquad t \to t' = t$$

transformiert, wobei $\vec{w}$ ein beliebiger Einheitsvektor ist. Drücken Sie $\frac{d}{d\epsilon} L(\vec{r}_k + \epsilon \vec{w} t, \dot{\vec{r}} + \epsilon \vec{w})|_{\epsilon=0}$ durch die Gesamtmasse $M = \sum_{k=1}^{N} m_k$ und die Schwerpunktskoordinate $\vec{r}_S = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k$ aus.

(8 Punkte)

(b) Bestimmen Sie die drei erhaltenen Noether-Ladungen zur Transformation in Gl. (1) für die Fälle $\vec{w} = \vec{e}_k$, $k = 1, 2, 3$, und fassen Sie sie zu einer vektoriellen Erhaltungsgröße zusammen. Drücken Sie das Ergebnis durch M, $\vec{r}_S$ und den Gesamtimpuls P der N Teilchen aus.

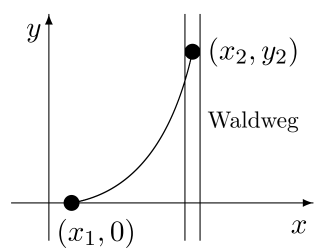
(10 Punkte)

(c) Verwenden Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe b), um die Schwerpunktsbewegung $\vec{r}_S(t)$ zu berechnen. Eliminieren Sie die Noether-Ladung zugunsten von $\vec{r}_S(0)$.

(2 Punkte)

Aufgabe 27: Schlümpfe auf der Flucht

Vor Gargamel flüchtende Schlümpfe durchqueren eine sumpfige (x, y)-Ebene, um einen parallel zur y-Achse verlaufenden geraden Waldweg zu erreichen. Die Geschwindigkeit $v = v(x)$, mit der sie laufen können, hängt von x, aber nicht von y ab. Die Schlümpfe befinden sich zum Zeitpunkt $t = 0$ bei $(x_1, 0)$ und möchten in möglichst kurzer Zeit T ihr Fluchtfahrzeug bei (x_2, y_2) erreichen. Dabei ist $x_2 > x_1 > 0$ und $y_2 > 0$.



(a) Formulieren Sie das Variationsproblem um den Weg $y(x)$, der die Zeit T minimiert, zu finden. Benutzen Sie dazu $dt = \frac{ds}{v(x)}$ mit dem Wegelement $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ und bestimmen Sie die Funktion $F(y'(x), y(x), x)$ in

$$T = \int_{x_1}^{x_2} dx \, F(y'(x), y(x), x) \tag{2}$$

(5 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass im vorliegenden Fall die Lösung des Variationsproblems durch

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = c \tag{3}$$

mit einer Integrationskonstanten c gegeben ist. Lösen Sie Gl. (3) nach $y'(x)$ auf, um $y'(x)$ durch $v(x)$ und c auszudrücken. Betrachten Sie nur Lösungen mit $y'(x) > 0$.

(5 Punkte)

(c) Betrachten Sie ab jetzt den Spezialfall $v(x) = \frac{x}{a}$ mit $a > 0$. Drücken Sie die Zeit T in Gl. (2) durch x_1, x_2 und a/c aus und stellen Sie sicher, dass die Argumente der Logarithmen dimensionslos sind.

Hinweis: $\displaystyle\int dz \frac{1}{z\sqrt{1-c^2z^2}} = \ln z - \ln(1+\sqrt{1-c^2z^2})$

(5 Punkte)

(d) Bestimmen Sie $y(x)$. Eliminieren Sie die Integrationskonstante, die Sie in diesem Schritt finden, mit Hilfe der Anfangsbedingung $y(x_1) = 0$. Drücken Sie danach c durch a, x_1, x_2 und y_2 aus.
Hinweis: Man spart etwas Rechenarbeit, wenn man zunächst c zugunsten von $w \equiv \sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 - x_1^2}$ eliminiert und w durch x_1, x_2 und y_2 ausdrückt.

(5 Punkte)

Aufgabe 28: Kippender Schornstein

Ein alter Schornstein der Länge $2l$ wird gesprengt und kippt um. Die Drehachse ist der Fußpunkt des Schornsteins. Wir wählen die Koordinaten des Schwerpunkts als $x = l\sin\phi$ und $z = l\cos\phi$ und vernachlässigen die Querschnittsfläche A des Schornsteins. Dabei dürfen wir die Dichte ρ des Schornsteins als konstant annehmen.

(a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment

$$\theta = A\rho \int_0^{2l} dz\, z^2$$

für die Drehung um den Fußpunkt, ausgedrückt durch die Masse m des Schornsteins. Bestimmen Sie die kinetische Energie $T = \frac{\theta}{2}\dot{\phi}^2$.

(2 Punkte)

(b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment für die Drehung um den Schwerpunkt. Welcher zusätzliche Term für die kinetische Energie kommt nun hinzu? Verifizieren Sie, dass Sie dasselbe Ergebnis erhalten wie in Teilaufgabe (a).

(3 Punkte)

(c) Geben Sie die Lagrangefunktion für die Bewegung des Schwerpunkts im Schwerefeld mit $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$ an und stellen Sie die Bewegungsgleichung für ϕ auf.

(2 Punkte)

(d) Führen Sie die erste Integration aus, um $\ddot{\phi}$ zu eliminieren und $\dot{\phi}$ durch ϕ auszudrücken. Eliminieren Sie die Integrationskonstante aus der Anfangsbedingung, dass der Schornstein zum Zeitpunkt $t = 0$ die (kleine) Neigung ϕ_0 hat. Betrachten Sie nur Lösungen mit $\dot{\phi} \geq 0$.

(4 Punkte)

(e) Bestimmen Sie die z-Komponente der Zwangskraft (als Funktion von ϕ), die auf den Schwerpunkt wirkt, für den Fall $\phi_0 = 0$.

(4 Punkte)

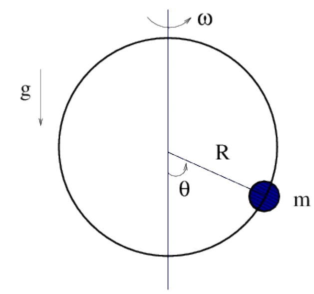
(f) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für $\phi(t)$ mit $(\dot{\phi}(0))^2 = \frac{3}{2}\frac{g(1-\cos\phi_0)}{l}$.
Hinweise: (i) Eine nützliche Abkürzung ist die Zeitkonstante $T = \sqrt{2l/(3g)}$.

(ii) $$\int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi'}{\sqrt{1-\cos\phi'}} = \sqrt{2}\left(\ln\tan\frac{\phi}{4} - \ln\tan\frac{\phi_0}{4}\right)$$

(5 Punkte)

Aufgabe 29: Perle auf rotierendem Draht

Eine Perle der Masse m gleitet reibungsfrei und unter dem Einfluss der Schwerkraft auf einem ringförmigen Draht mit dem Radius R, welcher seinerseits mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ parallel zu $\vec{g}$ um seinen Durchmesser rotiert.



(a) Stellen Sie die Hamiltonfunktion und die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen für $q \equiv \theta$ und $p_\theta \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$ auf.

(5 Punkte)

(b) Bestimmen Sie die kritische Winkelgeschwindigkeit Ω, unterhalb derer der tiefste Punkt des Drahtes eine stabile Gleichgewichtslage der Perle ist.
Hinweis: Schreiben Sie die Hamiltonfunktion als $H = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + U_{\text{eff}}(\theta)$ und untersuchen Sie das Verhalten von $U_{\text{eff}}(\theta)$.

(5 Punkte)

(c) Bestimmen Sie die stabile Gleichgewichtslage für $\omega > \Omega$.
(Damit ist die Lösung $\theta = \theta_0 = const.$ gemeint.)

(5 Punkte)

(d) Entwickeln Sie (für $\omega > \Omega$) $U_{\text{eff}}(\theta)$ um $\theta = \theta_0$ bis zur Ordnung $(\theta - \theta_0)^2$, so dass Sie das Potential eines harmonischen Oszillators finden. Geben Sie die Kreisfrequenz kleiner Schwingungen der Perle um die Gleichgewichtslage an.

(5 Punkte)