

Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. H. Frellesvig, Dr. R. Rietkerk

Übungsblatt 0

Ausgabe: 16.04.18 – Abgabe: Nicht zutreffend – Besprechung: 24.04.18

Aufgabe 1: Mathematische Grundlagen

- (a) Lösen Sie die Differentialgleichung $\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$ mit den Randbedingungen $x(t_1) = x_1$ und $x(t_2) = x_2$.
- (b) Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix $R = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- (c) Drücken Sie den Vektor $\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y$ in Polarkoordinaten aus, d.h. finden Sie A_r und A_θ , sodass für \vec{A} gilt $\vec{A} = A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta$.
- (d) Zeigen Sie, dass die Divergenz eines Vektors \vec{A} , $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}$, in Polarkoordinaten durch

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{A_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}, \quad (1)$$

gegeben ist.

- (e) Das Levi-Civita Symbol ϵ_{ijk} ist ein Objekt mit drei Indizes, welches durch die folgenden Formeln definiert ist

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{falls zwei Indizes gleich sind} \\ 1, & \text{falls } i, j, k \text{ eine gerade Permutation von } 1,2,3 \text{ ist} \\ -1, & \text{falls } i, j, k \text{ eine ungerade Permutation von } 1,2,3 \text{ ist} \end{cases} \quad (2)$$

Zeigen Sie, dass

$$(\vec{A} \times \vec{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k, \quad (3)$$

wobei A_j (bzw B_k) die j -Komponente des Vektors \vec{A} (bzw \vec{B}) ist.

- (f) Zeigen Sie, dass

$$\sum_{i=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}. \quad (4)$$

- (g) Die Gleichungen (3,4) kann man verwenden, um verschiedene Identitäten für Vektorprodukte zu bestimmen. Zeigen Sie, dass die folgenden Relationen gelten

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}), \quad (5)$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}). \quad (6)$$

(h) Berechnen Sie die Integrale

$$\int \frac{dx}{x+a}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int \frac{dx}{1+e^x}, \quad \int \frac{dx}{x^2-5x+6}, \quad (7)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2(\varphi), \quad \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}. \quad (8)$$