Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. H. Frellesvig, Dr. R. Rietkerk

Übungsblatt 1

Ausgabe: 20.04.18 – Abgabe: 27.04.18 bis 09:30 – Besprechung: 30.04.18

Aufgabe 1: Teilchen im Gravitationsfeld — 5 Punkte

Ein Teilchen der Masse m fällt vertikal im konstanten Gravitationsfeld der Erde. Wir beschreiben den Pfad des Teilchens mit dem Ansatz $z(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$, wobei c_0, c_1 und c_2 drei unbekannte Konstanten sind.

(a) Geben Sie die Lagrangefunktion L an, die das System beschreibt.

(b) Bestimmen Sie die Konstanten c_0 und c_1 aus den Randbedingungen $z(0) = h$ und $z(T) = 0$.

(c) Berechnen Sie die Wirkung

$$S = \int_0^T \mathrm{d}t\ L(z(t), \dot{z}(t)) \ , \tag{1}$$

als Funktion von m, g, h, T und c_2.

(d) Benutzen Sie das Prinzip der kleinsten Wirkung und zeigen Sie, dass $c_2 = -g/2$. Stimmt das Resultat mit dem überein, was Sie erwartet haben?

Aufgabe 2: Die Lagrangefunktion mit geschwindigkeitsabhängigem Potential — 5 Punkte

Betrachten Sie eine Lagrangefunktion L, welche die Bewegung eines Teilchens der Masse m in einem geschwindigkeitsabhängigen Potential U beschreibt

$$L = \tfrac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^{\,2} - U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \ . \tag{1}$$

Das Potential schreiben wir als

$$U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = e\,\phi(\vec{r}, t) - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \dot{\vec{r}} \ , \tag{2}$$

wobei e und c zwei Konstanten sind, $\phi(\vec{r}, t)$ ist ein elektrisches Potential und $\vec{A}(\vec{r}, t)$ ist ein Vektorpotential.

(a) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange Gleichungen.

(b) Verwenden Sie die folgende Formel, die wir in Übungsblatt 0 diskutiert haben,

$$\vec{\nabla}\,(\vec{x} \cdot \vec{y}\,) = (\vec{x} \cdot \vec{\nabla}\,)\,\vec{y} + (\vec{y} \cdot \vec{\nabla}\,)\,\vec{x} + \vec{y} \times (\vec{\nabla} \times \vec{x}\,) + \vec{x} \times (\vec{\nabla} \times \vec{y}\,) \ , \tag{3}$$

um den Term $\frac{\partial}{\partial \vec{r}}(\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}}) \equiv \vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}})$ in den Euler-Lagrange Gleichungen umzuschreiben.

(c) Zeigen Sie, dass man die Euler-Lagrange Gleichungen in folgende Form umschreiben kann

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{e}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - e\vec{\nabla}\phi + \frac{e}{c}\dot{\vec{r}} \times (\vec{\nabla}\times\vec{A}) \ . \tag{4}$$

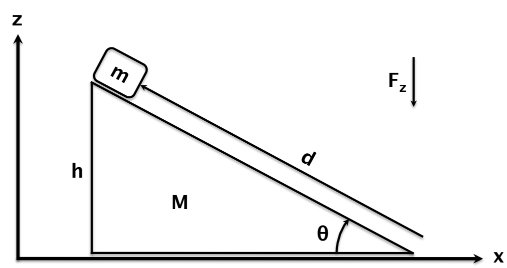
(d) In Maxwell's Theorie des Elektromagnetismus drückt man elektrische und magnetische Felder durch das elektrische Potential ϕ und das Vektorpotential $\vec{A}$ aus. Es gilt

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi \ , \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \ . \tag{5}$$

Benutzen Sie diese Formeln um die rechte Seite der Gl. (4) durch $\vec{E}$ und $\vec{B}$ auszudrücken. Können Sie die Kraft identifizieren, die auf der rechten Seite der Gl. (4) auftaucht?

Aufgabe 3: Schiefe Ebene — 10 Punkte

Eine Schachtel der Masse m sei auf einem Gefälle der Masse M platziert. Das Gefälle hat einen Steigungswinkel θ und befindet sich auf einer horizontalen Ebene, auf der es sich ohne Reibung frei bewegen kann. Die Schachtel fängt aus der Ruhe an, entlang der schiefen Seite nach unten zu rutschen. Wir wollen bestimmen, wie viel Zeit die Schachtel braucht, um die horizontale Ebene zu erreichen.



(a) Konstruieren Sie die Lagrangefunktion die dieses mechanische System beschreibt. Benutzen Sie Kartesische Koordinaten (x_M, y_M) und (x_m, y_m), um die Positionen der Schachtel und des Gefälles auszudrücken.

(b) Diese Kartesische Koordinaten sind nicht unabhängig. Argumentieren Sie, dass man y_M Null setzen kann. Nehmen Sie als verallgemeinerte Koordinate die Distanz d zwischen der Schachtel und der horizontalen Ebene entlang des Gefälles (siehe Abbildung). Eliminieren Sie x_m und y_m in der Lagrangefunktion.

(c) Bestimmen Sie zwei Euler-Lagrange Gleichungen.

(d) Verwenden Sie diese Gleichungen um die Beschleunigungen $\ddot{x}_M$ und $\ddot{d}$ zu finden.

(e) Was erwarten Sie für $\ddot{x}_M$ und $\ddot{d}$ in den zwei Grenzfällen $\theta \to 0$ und $\theta \to \pi/2$? Stimmt Ihre Erwartung mit dem Ergebnis in (d) überein?

(f) Was passiert mit $\ddot{d}$, falls $m \ll M$ (für $\theta \approx 30°$)?

(g) Die Schachtel sei um Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhe auf dem höchsten Punkt (Höhe h) des Gefälles platziert. Wie viel Zeit braucht die Schachtel um die horizontale Ebene zu erreichen?

Aufgabe 4: Differenzialgleichungen in verschiedenen Koordinaten 5 Punkte

Eine Lagrangefunktion $L(q, \dot{q}, t)$ beschreibt ein mechanisches System. Es ist aber möglich, das gleiche System mit anderen Koordinaten $q' = q'(q, t)$ zu beschreiben. In diesem Fall hat die Lagrangefunktion eine andere Form, $L \to L'(q', \dot{q}', t)$.

(a) Beginnen Sie mit der Euler-Lagrange Gleichung für q und L und zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange Gleichung für q' und L' die "kanonische" Form hat, d.h.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'} = \frac{\partial L'}{\partial q'} \ . \tag{1}$$

Hinweis: Die folgenden Identitäten sind nützlich, $\frac{\partial \dot{q}'}{\partial q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial q'}{\partial q}$ und $\frac{\partial \dot{q}'}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial q'}{\partial q}$.

(b) Betrachten Sie ein mechanisches System, das von N Koordinaten abhängt, welche unter $q_i' = q_i'(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$ für $i = 1, 2, \ldots, N$ transformieren. Können Sie den Beweis aus Teilaufgabe (a) dementsprechend verallgemeinern?