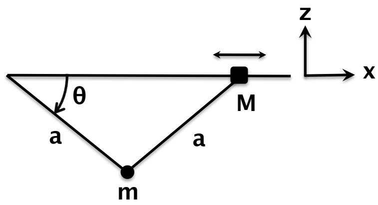
Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. H. Frellesvig, Dr. R. Rietkerk

Übungsblatt 2

Ausgabe: 27.04.18 – Abgabe: 04.05.18 bis 09:30 – Besprechung: 08.05.18

Aufgabe 1: Rutschende Masse — 3 Punkte

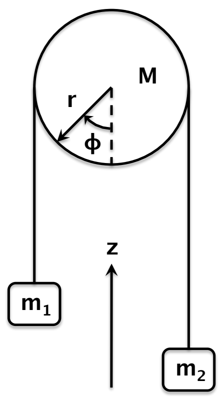


In dem gezeigten System kann eine Perle mit Masse M frei entlang einer horizontalen Stange gleiten. Ein Ball mit der Masse m ist mit zwei massenlosen Stangen der Länge a an dieser befestigt. Die Schwerkraft wirkt in vertikale Richtung.

(a) Konstruieren Sie die Lagrange'sche Funktion $L(\theta, \dot{\theta})$ für dieses System.

(b) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange Gleichung.

Aufgabe 2: Atwood'sche Fallmaschine — 7 Punkte



Die Atwood'sche Fallmaschine besteht aus zwei Lasten mit den Massen m_1 und m_2, die durch ein massenloses Seil der Länge ℓ verbunden sind, welches eine Umlenkrolle mit Radius r und Masse M umläuft. Wenn eine der Masses sich nach unten bewegt, zieht sie die andere Masse nach oben. Die Umlenkrolle rotiert dann genau so, dass das Seil nicht rutscht.
Ziel dieser Aufgabe ist es, die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren zu üben.

(a) Die kinetische Energie der Umlenkrolle ist gegeben durch

$$T_{\text{Rolle}} = \tfrac{1}{4} M r^2 \omega^2 \ , \tag{1}$$

wobei $\omega = \dot{\phi}$ die Winkelfrequenz ist. (Diese Beziehung wird später in der Vorlesung hergeleitet.) Zeigen Sie, dass die Abrollbedingung impliziert, dass $\omega = \dot{z}_1/r$, wobei z_1 die vertikale Position der Masse m_1 ist.

(b) Konstruieren Sie die Lagrange'sche Funktion $L(z_1, \dot{z}_1, z_2, \dot{z}_2)$, wobei z_2 die vertikale Position der Masse m_2 ist. (Der Mittelpunkt der Umlenkrolle bleibt fest.)

(c) Drücken Sie die Zwangsbedingung, dass das Seil die feste Länge ℓ hat, in der Form $f(z_1, z_2) = 0$ aus.

(d) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange Gleichungen für $L_{\text{tot}} = L(z_1, \dot{z}_1, z_2, \dot{z}_2) + \lambda f(z_1, z_2)$.

(e) Eliminieren Sie den Lagrange'schen Multiplikator λ in den Euler-Lagrange Gleichungen und verwenden Sie die Zwangsbedingung $f(z_1, z_2) = 0$, um die Beschleunigung

$$\ddot{z}_1 = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + M/2} \,, \tag{2}$$

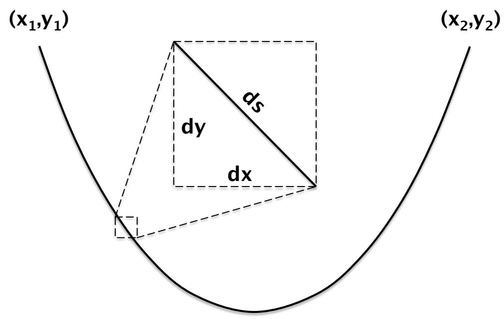
von Masse m_1 herzuleiten.

(f) Die auf Masse m_2 wirkende Gesamtkraft ist die Vektorsumme der Spannung des Seils (nach oben) und der Schwerkraft (nach unten). Berechnen Sie die Spannung des an Masse m_2 befestigten Seils.

(g) Können Sie eine physikalische Interpretation des Lagrange'schen Multiplikators λ angeben?

Aufgabe 3: Seilkurve **10 Punkte**

Das Ziel dieser Aufgabe ist es, die Kurve eines hängenden Seils mittels des Prinzips der kleinsten Wirkung zu bestimmen. Da dies kein dynamisches System darstellt reicht es, die potentielle Energie zu minimieren.



(a) Bezeichnen Sie das infinitesimale Linienelement entlang der Bahn des Seiles mit ds (siehe Abbildung). Zeigen Sie, dass die Länge ℓ des Seils gegeben ist durch

$$\ell = \int ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx \,, \quad y' = \frac{dy}{dx} \,. \tag{1}$$

(b) Die konstante Massendichte des Seiles sei μ. Zeigen Sie, dass die potentielle Energie des Seils gegeben ist durch

$$U = \int \mu g\, y\, ds = \mu g \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2}\, dx \,. \tag{2}$$

(c) Das Seil nimmt eine Kurve $y(x)$ an welche U im Bezug auf kleine Variationen in $y(x)$ minimiert, unter der Zwangsbedingung, dass die Länge des Seils konstant bleibt. Dieses Problem lässt sich Mithilfe des Lagrange'schen Multiplikators λ schreiben als

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} f(y, y')\, dx = 0 \ , \quad f(y, y') = (\mu g\, y - \lambda)\sqrt{1 + y'^2} \ . \tag{3}$$

Führen Sie die Variation in Gleichung (3) für eine allgemeine Funktion f aus. Leiten Sie her, dass

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \ . \tag{4}$$

(d) Zeigen Sie, dass in diesem Fall aus $\partial f/\partial x = 0$ folgt, dass

$$\frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \ . \tag{5}$$

Hinweis: Beginnen Sie damit, die totale Ableitung df/dx auszuschreiben.

(e) Integrieren Sie Gleichung (5) einmal in x, und bezeichnen Sie die Integrationskonstante mit A. Leiten Sie danach die folgende Differentialgleichung für y her

$$\frac{\mu g\, y - \lambda}{\sqrt{1 + y'^2}} = A \ . \tag{6}$$

(f) Überprüfen Sie, dass die Differentialgleichung durch

$$y(x) = \frac{A}{\mu g} \cosh\left(\frac{\mu g}{A}(x - B)\right) + \frac{\lambda}{\mu g} \ , \tag{7}$$

gelöst wird, wobei B eine weitere Integrationskonstante ist.

(g) Setzen Sie die Lösung $y(x)$ aus Gleichung (7) in das Integral Gleichung (1) ein und berechnen Sie die Länge ℓ in Abhängigkeit der unbekannten Konstanten A, B und λ, sowie der bekannten Parameter μ, g, x_1 und x_2.

(h) Die drei unbekannten Konstanten A, B und λ können mit drei Zwangsbedungungen bestimmt werden. Zwei Gleichungen für die Endpunkte des Seils, $y(x_1) = y_1$ und $y(x_2) = y_2$, und eine Gleichung um die Länge des Seils durch einen bestimmten Wert ℓ festzulegen.
Nehmen Sie an, dass die Endpunkte des Seils bei $x_1 = -1$ und $x_2 = +1$ mit gleichen Höhen $y(x_1) = y(x_2) = 0$ fixiert sind. Bestimmen Sie B und λ aus den ersten zwei Bedingungen. Leiten Sie aus der dritten Bedingung her, dass A die folgende Gleichung erfüllt,

$$A \sinh\left(\frac{\mu g}{A}\right) - \frac{\mu g \ell}{2} = 0 \ . \tag{8}$$

Skizzieren Sie die Kurve $y(x)$, einmal mit $\ell = 3$ und einmal mit $\ell = 100$. Setzen Sie hierfür $\mu = 1$ und $g = 10$. Sie dürfen außerdem verwenden, dass

$$z \sinh(10/z) - 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad z \simeq 6.1647 \ , \tag{9}$$
$$z \sinh(10/z) - 500 = 0 \quad \Rightarrow \quad z \simeq 1.5449 \ . \tag{10}$$