Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. H. Frellesvig, Dr. R. Rietkerk

Übungsblatt 5

Ausgabe: 18.05.18 – Abgabe: 25.05.18 bis 09:30 – Besprechung: 29.05.18

Aufgabe 1: Bewegungsgleichungen für verschiedene Potenziale 5 Punkte

Ein Teilchen mit Masse m bewegt sich in einem eindimensionalen Potenzial $U(x)$.

(a) Geben Sie die zugehörige Lagrangefunktion an.

(b) Die Lagrangefunktion ist zeitunabhängig. Welche Größe ist in diesem Fall erhalten?

(c) Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, ist es in diesem Fall möglich die Zeit als Funktion des Ortes zu schreiben:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{\sqrt{E - U(y)}} \,. \tag{1}$$

Bestimmen Sie x als Funktion von t für das Potenzial $U(x) = \alpha/x^2$ unter der Annahme, dass α und die Energie positiv sind.

(d) Wiederholen Sie die vorherige Aufgabe für das Potenzial $U(x) = \alpha x^2$ (mit positivem α und positiver Energie).

Hinweis: nützliche Integrale sind:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{a - bz^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \arccos\left(\frac{\sqrt{b}\, z}{\sqrt{a}}\right) , \tag{2}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{a + b/(z^2)}} = \frac{z\sqrt{a + b/(z^2)}}{a} . \tag{3}$$

Aufgabe 2: Potenzial mit lokalem Maximum 8 Punkte

In dieser Aufgabe betrachten wir ein Teilchen in dem in Abb. 1 gezeigten Potential.

(a) Argumentieren Sie, dass das Teilchen zwischen x_0 und x_1 pendelt.

(b) Nähern Sie das Potenzial in der Nähe von $x = 0$ durch $U(x) = U(0) - \frac{1}{2}\kappa x^2$ und betrachten Sie den Fall, dass sich das Teilchen von links nach rechts bewegt. Wie viel Zeit verbringt das Teilchen zwischen $x = -\delta$ und $x = \delta$? (δ ist positiv und sehr viel kleiner als $L = x_1 - x_0$).

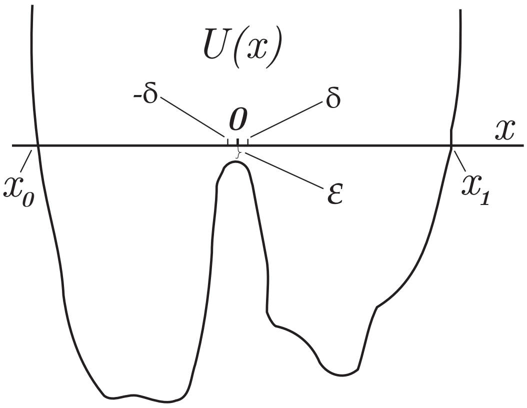

Abbildung 1: Eine Skizze des Potenzials in Aufgabe 2. Die horizontale Achse zeigt die Position, die vertikale zeigt die Energie E. Die Breite des Potenzials ist $L = x_1 - x_0$.

Hinweis: benutzen Sie das Integral

$$\int_{-c}^{c} \frac{dz}{\sqrt{a + bz^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \left(\log\left(a + 2bc^2 + 2c\sqrt{b(a + bc^2)} \right) - \log a \right). \tag{1}$$

(c) Betrachten Sie den Fall, dass $\epsilon = E - U(0)$ viel kleiner als alle anderen Größen dieses Problem ist. Zeigen Sie dass die Zeit, die zwischen $x = -\delta$ und $x = \delta$ (wobei δ viel kleiner als die Breite L ist) verbracht wird, durch

$$t_1 = \sqrt{\frac{m}{\kappa}} \log\left(\frac{2\delta^2\kappa}{\epsilon}\right) \tag{2}$$

angenähert werden kann.

(d) Zeigen Sie, dass wenn das Teilchen außerhalb des Bereichs zwischen $x = -\delta$ und $x = \delta$ ist, die Geschwindigkeit

$$|v| > \delta\sqrt{\frac{\kappa}{m}}, \tag{3}$$

erfüllt und dass die Zeit, die außerhalb des Bereichs zwischen $x = -\delta$ und $x = \delta$ verbracht wird, gegeben ist durch

$$t_2 < \frac{2L}{\delta}\sqrt{\frac{m}{\kappa}}. \tag{4}$$

(e) Argumentieren Sie, dass, für ausreichend kleine Werte von ϵ, eine gute Näherung für die Schwingungsdauer gegeben ist durch

$$\tau = 2\sqrt{\frac{m}{\kappa}} \log\left(\frac{2\kappa L^2}{\epsilon}\right). \tag{5}$$

Aufgabe 3: Störung des Potenzials $\boxed{\textbf{7 Punkte}}$

In dieser Aufgabe betrachten wir ein Teilchen der Masse m im Potenzial

$$U(x) = \tfrac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \delta U(x)\,, \tag{1}$$

wobei δU eine kleine Störung ist.

(a) Betrachten wir zuerst den ungestörten Fall $\delta U(x) = 0$. In diesem Fall entspricht das Problem einem harmonischen Oszillator.
Eine Lösung der Bewegungsgleichungen im ungestörten Fall ist

$$x_0(t) = A_0 \sin(\omega t)\,. \tag{2}$$

Berechnen Sie die totale Energie des Teilchens als Funktion von A_0 und benutzen Sie das um ein Ausdruck für A_0 im Sinne von E herzuleiten.

(b) In der Vorlesung und in vorherigen Aufgaben haben wir hergeleitet, dass die Zeit die benötigt wird um von Punkt x_1 zu x_2 zu kommen durch

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dy}{\sqrt{E - U(y)}}\,, \tag{3}$$

gegeben ist. Zeigen Sie, dass

$$t = -\sqrt{2m}\, \frac{\partial}{\partial E} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{E - U(y)}\, dy\,, \tag{4}$$

zu Gl. (3) äquivalent ist und, dass dieser Ausdruck auch gültig ist wenn x_1 und x_2 die Lösungen von $E = U(x)$ sind. Hinweis: beachten Sie auch die Beiträge der Ableitungen von $x_i(E)$.

Aus Gl. (4) ist herzuleiten, dass eine Störung des Potenziales $U \to U + \delta U$ eine Änderung der Schwingungsdauer $T \to T + \delta T$ impliziert, wobei

$$\delta T \approx -\sqrt{2m}\, \frac{\partial}{\partial E} \int_{-A_0(E)}^{A_0(E)} \frac{\delta U(x)\, dx}{\sqrt{E - U_0(x)}}\,, \tag{5}$$

wobei A_0 die Position des oberen Wendepunkts im ungestörten Fall ist.
Es sei

$$\delta U(x) = \tfrac{1}{n} m\alpha x^n, \qquad (n \in \mathbb{N})\,, \tag{6}$$

wobei der Parameter α viel kleiner ist als alle anderen Größen in diesem Problem.

(c) Wie groß ist die Änderung der Schwingungsdauer δT für $n = 3$ und andere ungerade Werte?

(d) Drücken Sie δT für den Fall $n = 4$ durch E, ω, m und α aus.

(e) Was ist der qualitative Unterschied zwischen $n = 2$ und allen anderen geraden Werten?