Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. H. Frellesvig, Dr. R. Rietkerk

Übungsblatt 8

Ausgabe: 08.06.18 – Abgabe: 15.06.18 bis 09:30 – Besprechung: 19.06.18

Aufgabe 1: Schwingungen auf einer Kreisbahn — 5 Punkte

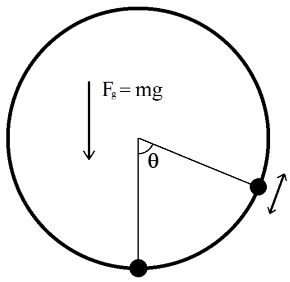

Abbildung 1

In dieser Aufgabe betrachten wir das in Abbildung 1 gezeigte System. Ein Teilchen der Masse m und elektrischer Ladung q kann sich frei auf der Kreisbahn mit Radius r bewegen. Es wird durch eine nach unten wirkende Schwerkraft mg beeinflusst. Zudem ist am untersten Punkt der Bahn ein Teilchen (ebenfalls mit Ladung q) fixiert, das das andere Teilchen durch die Coulomb-Kraft abstößt. Wir wählen die Einheiten so, dass das Coulomb-Potential zwischen zwei Teilchen mit Ladung q und Abstand d durch q^2/d gegeben ist.

(a) Zeigen Sie, dass die Lagrange Funktion für das bewegliche Teilchen durch

$$L = \tfrac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + mgr\cos(\theta) - \frac{q^2}{2r\sin(\theta/2)} \tag{1}$$

gegeben ist.

(b) Es wird angenommen, dass die Werte von m und q ein Gleichgewichtszustand des beweglichen Teilchens, bei einem Winkel zwischen $\theta = 0$ und $\theta = \pi$, zulassen. Finden Sie diesen Gleichgewichtswinkel und drücken Sie ihn durch r, g, m und q aus.

(c) Die Bewegung besteht aus kleinen Schwingungen um die Gleichgewichtslage. Bestimmen Sie die Kreisfrequenz ω dieser Schwingungen.

Aufgabe 2: Gedämpfte Schwingungen — 4 Punkte

In dieser Aufgabe betrachten wir gedämpfte Schwingungen in einer Dimension. Gedämpfte Schwingungen ergeben sich durch die Einwirkung einer Kraft

$$F = -kx - \mu\dot{x}\,.$$

Die Bewegungsgleichung ist dann gegeben als

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0\,. \tag{1}$$

(a) Drücken Sie γ und ω_0 für ein Teilchen der Masse m in Abhängigkeit von k, μ und m aus.

(b) Wenn $\gamma < 2\omega_0$, nennt man die Schwingung "schwach gedämpft". Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Bewegungsgleichung durch

$$x = x_0 e^{-\gamma t/2} \cos(\omega_d t) \tag{2}$$

gelöst wird, wobei

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}\,. \tag{3}$$

Hinweis: Es reicht zu Überprüfen, dass die Lösung gültig ist.

(c) Was ist das Verhältnis der Amplituden von zwei aufeinanderfolgenden Schwingungen zur gleichen Seite hin?

(d) Wenn Reibung in Betracht gezogen wird, ist die Energie des Teilchens nicht erhalten. Was ist die Energie von einem schwach gedämpften Oszillator als Funktion der Zeit? (Nehmen Sie an, dass $\gamma \ll \omega_0$.)

Aufgabe 3: Erzwungene Schwingungen — 7 Punkte

In dieser Aufgabe betrachten wir die Auswirkungen einer externen Kraft auf einen harmonischen Oszillator. Dies bezeichnet man als erzwungene Schwingung.

(a) Erzwungene Schwingungen lösen die Gleichung

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m}\,. \tag{1}$$

Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, ist die spezielle Lösung

$$x_p(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{F(\tau)}{m\omega} \sin(\omega(t-\tau))d\tau\,, \tag{2}$$

wobei t_0 eine beliebige Konstante ist. Das bedeutet, dass die allgemeine Lösung durch

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) + x_p(t)\,, \tag{3}$$

gegeben ist, wobei A und ϕ freie Parameter sind. Prüfen Sie die Gültigkeit dieser Lösung, indem Sie Gleichung (3) in Gleichung (1) einsetzen.

(b) Ein häufig auftretender Fall ist eine harmonische Kraft $F(t) = F_0 \sin(\Omega t)$, wobei sich Ω im Allgemeinen von der Eigenfrequenz ω unterscheidet. Leiten Sie für diese harmonische Kraft den generellen Ausdruck für $x(t)$ her. Sie können $t_0 = 0$ annehmen.

(c) Der Ausdruck aus Teilaufgabe (b) lässt sich schreiben als

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\omega^2 - \Omega^2} \sin(\Omega t)\,. \tag{4}$$

Bestimmen Sie A und ϕ.

(d) Jede periodische ungerade Funktion $f(x)$ mit Periode $2\pi/\Omega$ kann als eine sogenannte Fourierreihe

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\Omega n t)\,, \tag{5}$$

geschrieben werden, wobei die Koeffizienten c_n duch

$$c_n = \frac{\Omega}{\pi} \int_{-\pi/\Omega}^{\pi/\Omega} f(t)\, \sin(\Omega n t)\, dt \tag{6}$$

gegeben sind. Beweisen Sie Gleichung (6) mit Hilfe von Gleichung (5).
Hinweis: $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nz)\sin(\nu z) dz = \delta_{n\nu}\pi$ für ganzzahlige $\{n, \nu\}$.

(e) Betrachten wir die in Abbildung 2 gezeigte Funktion $F(t)$. Im Bereich zwischen $t = -\pi/\Omega$ und $t = \pi/\Omega$ gilt $f(t) = \Omega F_z t/\pi$. Außerhalb dessen wiederholt sich die Funktion periodisch. Finden Sie ein Ausdruck für die Fourierreihe der harmonischen Schwingung, die aus dieser Antriebskraft resultiert (mit Eigenfrequenz ω und Masse m).
Hinweis: Benutzen Sie die Fourierreihe, die Linearität der Differentialgleichung und Gleichung (4).

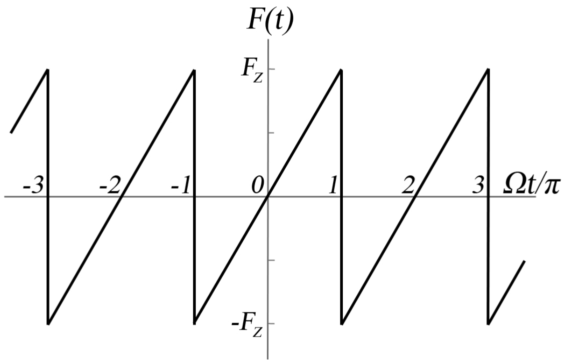

Abbildung 2: Die Antriebskraft aus Aufgabe 3 (e).

Aufgabe 4: Angeregte Schwingungen **4 Punkte**

Ein leichtes Teilchen der Masse m oszilliert harmonisch mit der Eigenfrequenz ω. Ein viel schweres Teilchen bewegt sich entlang einer geraden Linie mit der Geschwindigkeit v und fliegt an dem leichten Teilchen zur Zeit $t = 0$ mit einem minimalen Abstand ρ vorbei. Das schwere Teilchen übt eine Kraft auf das leichte Teilchen aus, die eine Schwingung induziert. Die Kraft kann durch $F = f_0 \exp(-\alpha d^2)$ genähert werden, wobei d der Abstand zwischen den beiden Teilchen ist.

(a) Die Bewegungsgleichung für das leichte Teichen ist durch

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m} \tag{1}$$

gegeben, wobei

$$F(t) = F_0 \exp(-\beta t^2)\,. \tag{2}$$

Was sind F_0 und β, ausgedrückt durch f_0, α, v und ρ?

(b) Leiten Sie einen Ausdruck für $x(t)$ für die Schwingungen des leichten Teilchens her, lange Zeit nachdem ($t = +\infty$) das schwere Teilchen vorbei geflogen ist, unter die Annahme, dass das leichte Teilchen zu Beginn ($t = -\infty$) im Ruhezustand ist.