Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. H. Frellesvig, Dr. R. Rietkerk

Übungsblatt 9

Ausgabe: 15.06.18 – Abgabe: 22.06.18 bis 09:30 – Besprechung: 26.06.18

Aufgabe 1: Dreiatomiges Molekül — 10 Punkte

In dieser Aufgabe modellieren wir ein geradliniges dreiatomiges Molekül mit einem zentralen Atom der Masse M und zwei identischen Atomen der Masse m an den Endpunkten. Ein realistisches Beispiel eines solchen Moleküls ist CO_2. Das gleiche Beispiel wurde in der Vorlesung etwas anders besprochen.

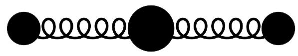

Abbildung 1

Wir modellieren die atomischen Kräfte zwischen dem zentralen Atom und den Seitenatomen als Federn mit Federkonstante k, welche in Ruhelage eine Länge b haben. Wir betrachten nur die Bewegung entlang der Symmetrieachse des Moleküls, was das Problem eindimensional macht. Wir bezeichnen die Position des zentralen Atoms als x_2 und die Position der Seitenatome als x_1 und x_2. Dann sieht das Potential folgendermaßen aus:

$$U = \frac{k}{2}\Big((x_2 - x_1 - b)^2 + (x_3 - x_2 - b)^2\Big)\,.$$

(a) Was ist die Lagrange Funktion für dieses System?

(b) Wir führen neue Koordinaten η relativ zur Ruhelage ein. Sei x_{20} die Position des zentralen Atoms an einem bestimmten Zeitpunkt (sodass $\dot{x}_{20} = 0$). Dann sind die alten Koordinaten gegeben als $x_2 = x_{20} + \eta_2$, $x_1 = x_{20} + \eta_1 - b$ und $x_3 = x_{20} + \eta_3 + b$. Wie sieht die Lagrange Funktion in den neuen Koordinaten aus?

(c) Die Bewegungsgleichung für η_1 ist $m\ddot{\eta}_1 + k(\eta_1 - \eta_2) = 0$. Was sind die Bewegungsgleichungen für η_2 und η_3?

(d) Wir betrachten sinusförmige Lösungen der Form $\ddot{\eta}_i = -\omega^2\eta_i$ mit der Kreisfrequenz ω. Zeigen Sie mit Hilfe dieses Ansatzes, dass die Bewegungsgleichungen durch $A\vec{\eta} = 0$ gegeben sind. Hierbei bezeichnet $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ und

$$A = \begin{bmatrix} k - \omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k - \omega^2 m \end{bmatrix}.$$

(e) Ein solches Gleichungssystem erlaubt nur von Null verschiede Lösungen, wenn $\det(A) = 0$. Warum ist das so?

(f) Zeigen Sie, dass nur drei unterschiedliche (nichtnegative) Werte von ω von Null verschiede Lösungen erlauben: $\omega = 0$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, und $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 + \frac{2m}{M}\right)}$.

(g) In der Vorlesung wurde dieses Problem mit Hilfe der Eigenvektoren und Eigenwerte der Matrix

$$B = \begin{bmatrix} k/m & -k/m & 0 \\ -k/M & 2k/M & -k/M \\ 0 & -k/m & k/m \end{bmatrix}$$

gelöst. Die Eigenvektoren sind $(1, 1, 1)$, $(1, 0, -1)$ und $(1, -2m/M, 1)$. Die Eigenwerte sind die Quadrate der drei Werte von ω aus der vorherigen Teilaufgabe. Warum sind diese zwei Lösungsweisen äquivalent?

(h) Was ist die physikalische Interpretation der drei Schwingungsmoden?

Aufgabe 2: Vier Glasperlen auf einem Ring **10 Punkte**

Vier Glasperlen der Masse m (nummeriert von 1 bis 4) bewegen sich auf einem Ring mit dem Radius r. Die Perlen sind mit Federn verbunden mit der Eigenschaft, dass die potentielle Energie einer Feder zwischen zwei Perlen an den Winkeln θ_i und θ_j durch $\frac{1}{2}kr^2(\theta_j - \theta_i)^2$ gegeben ist.

(a) Eine mögliche Ruhelage für das System ist bei $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/2$, $\theta_3 = \pi$ und $\theta_4 = 3\pi/2$. Führen Sie neue Koordinaten relativ zur Ruhelage ein: $\theta_1 = \phi_1$, $\theta_2 = \phi_2 + \pi/2$, $\theta_3 = \phi_3 + \pi$, $\theta_4 = \phi_4 + 3\pi/2$ und geben Sie die Lagrange Funktion und die Bewegungsgleichungen der Perlen an.

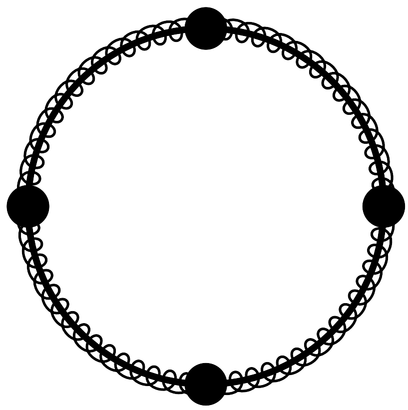

Abbildung 2

(b) Wir betrachten nun wieder kleine Schwingungen um die Ruhelage. Argumentieren Sie, dass mit einem Ansatz für die Schwingungen der Kreisfrequenz ω das Bewegungsgleichungssystem durch

$$A\vec{\phi} = \vec{0} \qquad \text{mit} \qquad A = -\omega^2 I + B \qquad \text{und} \qquad \vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) \quad (1)$$

gegeben ist, wobei I die 4×4 Einheitsmatrix ist.

(c) Bestimmen Sie die Matrix B in Abhängigkeit von m und k.

(d) Erraten Sie eine Menge orthogonaler Eigenvektoren für die Matrix B und setzen Sie diese in Gleichung (1) ein, um die dazugehörigen Eigenfrequenzen ω zu bestimmen.
Hinweis 1: Betrachten Sie die Symmetrien des Systems beim Raten der Eigenvektoren. Falls sich eine Perle in eine Richtung bewegt, wie müssen sich die anderen Perlen bewegen, damit das ganze System stabil ist?

Hinweis 2: Die (positiven) Eigenfrequenzen ω sollen 0, $\sqrt{2k/m}$, $\sqrt{2k/m}$ und $2\sqrt{k/m}$ sein.

(e) Was ist die physikalische Interpretation dieser vier Schwingungsmoden?

(f) Sei U eine 4×4 Matrix mit Reihen bestehend aus den orthonormalen (d.h. orthogonal und mit Länge 1) Eigenvektoren von B. Führen Sie neue Koordinaten ψ ein, die durch $\vec{\psi} = U\vec{\phi}$ definiert sind. Geben Sie die Lagrange Funktion und Bewegungsgleichungen in Abhängigkeit dieser neuen Koordinaten an.

(g) Warum sind die ψ vorteilhafte Koordinaten? Wie kommt es, dass sie so aussehen?