Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. H. Frellesvig, Dr. R. Rietkerk

Übungsblatt 13

Ausgabe: 13.07.18 – Abgabe: 20.07.18 bis 09:30

Aufgabe 1: Teller — 8 Punkte

Wir entwenden aus der TTP-Küche einen dünnen kreisförmigen Teller mit dem Radius R und einer homogenen Massendichte, sodass die Gesamtmasse des Tellers m beträgt. Wir positionieren den Teller in der x, y-Ebene mit dem Zentrum im Ursprung.

(a) Was ist das (skalare) Trägheitsmoment des Tellers um die z-Achse?

(b) Was ist das (skalare) Trägheitsmoment des Tellers um die x-Achse? Und um die y-Achse?

(c) Betrachten Sie eine Achse parallel zur z-Achse durch den Rand des Tellers. Berechnen Sie das (skalare) Trägheitsmoment des Tellers um diese neue Achse mithilfe des Steinerschen Satzes.

(d) Beantworten Sie die vorherige Frage durch das direkte Lösen des Integrals und überprüfen Sie die Übereinstimmung mit dem vorherigen Resultat.

(e) Nun bohren wir ein Loch mit dem Radius q an der Stelle $(r, 0, 0)$ in den Teller, so dass $q < r$ und $q + r < R$. Was sind nun die (skalare) Trägheitsmomente des Tellers um die x-, y-, und z-Achse?

(f) Nachdem wir den Teller gegen einen neuen ohne Loch ersetzt haben, legen wir diesen auf eine Töpferscheibe, die ihn mit der Kreisfrequenz ω um die x-Achse rotieren lässt. Was ist die kinetische Energie des Tellers?

(g) Nun nehmen wir den Teller und lassen ihn durch den Flur im 11. Stock mit der Geschwindigkeit v rollen. Was ist seine kinetische Energie?

Aufgabe 2: Polygon — 4 Punkte

Wir betrachten ein homogenes dünnes regelmäßiges Polygon mit der Masse m, der Fläche A und mit N Seiten.

(a) Berechnen Sie das (skalare) Trägheitsmoment I_N des Polygons um die senkrechte Achse durch das Zentrum.

(b) Zeigen Sie, dass sich mit dem allgemeinen Resultat der vorherigen Frage die Trägheitsmomente eines Quadrats und eines Kreises reproduzieren lassen:

$$I_{\text{Quadrat}} = \frac{mA}{6} , \qquad I_{\text{Kreis}} = \frac{mA}{2\pi} . \tag{1}$$

Hinweis: Verwenden Sie $\lim_{N\to\infty} N \tan(\pi/N) = \pi$.

Aufgabe 3: Schaukelstuhl $\boxed{\textbf{8 Punkte}}$

Nachdem wir den ganzen Tag mit Tellern und Polygonen gearbeitet haben, wollen wir uns in einem Schaukelstuhl ausruhen. Dieser hat die Masse m und das Trägheitsmoment I_s um der Massenmittelpunkt. Die Füße des Stuhls sind bogenförmige Holzstücke mit dem Radius R. Wenn der Stuhl aufrecht steht, befindet sich der Massenmittelpunkt auf der Höhe h (mit $h < R$) über den Kontaktpunkten. Ziel dieser Aufgabe ist es, die „Schaukelfrequenz" des Schaukelstuhls zu bestimmen.

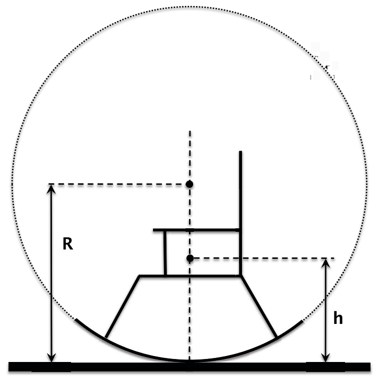

Abbildung 1: Schaukelstuhl.

(a) Finden Sie die Position des Massenmittelpunkts $(x_{\mathrm{cm}}(\theta), y_{\mathrm{cm}}(\theta))$ in Abhängigkeit des Winkels θ zwischen dem Schaukelstuhl und der Vertikalen. Der Winkel ist so definiert, dass bei $\theta = 0$ der Stuhl aufrecht steht und er bei $\theta > 0$ rückwärts neigt, siehe Abbildung 2. Der Ursprung liege bei $(x_{\mathrm{cm}}(0), y_{\mathrm{cm}}(0)) = (0, h)$.

(b) Bestimmen Sie die potentielle Energie des Schaukelstuhls (bedingt durch Gravitation) in Abhängigkeit von θ. Entwickeln Sie die potentielle Energie um den Gleichgewichtspunkt. Warum sind kleine Schwingungen des Schaukelstuhls um den Gleichgewichtspunkt stabil?

(c) Bestimmen Sie die kinetische Energie des Schaukelstuhls in Abhängigkeit von θ und entwickeln Sie diese um den Gleichgewichtspunkt.

(d) Zeigen Sie, dass die Frequenz der kleinen Schwingungen durch

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mg(R-h)}{I_s + mh^2}} \tag{1}$$

gegeben ist.

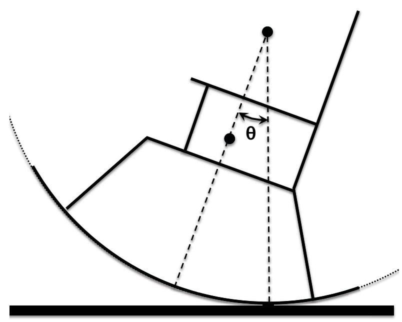

Abbildung 2: Der rückwärts neigende Schaukelstuhl bildet einen Winkel θ zur Vertikalen.

Lösung der Aufgabe 1

(a) $\boxed{\text{1 Punkt}}$ *I um z-Achse*
Zunächst finden wir die Masse durch die Flächenmassendichte ρ:

$$m = \int \rho dA = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho r d\theta dr = 2\pi\rho \int_0^R r dr = \pi \rho R^2 \ \Leftrightarrow$$
$$\rho = \frac{m}{\pi R^2} \ . \tag{2}$$

Somit erhalten wir für das Trägheitsmoment um die z-Achse:

$$I_z = \int \rho r^2 dA = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi \int_0^R r^3 dr = \frac{2m}{R^2}\frac{1}{4}R^4 = \frac{1}{2} m R^2 \ . \tag{3}$$

(b) $\boxed{\text{1 Punkt}}$ *I um x- und y-Achse*
Um die x-Achse:

$$I_x = \int \rho y^2 dA = \frac{m}{\pi R^2} \int_{-R}^R dx \ 2 \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} dy \ y^2 = \frac{2m}{\pi R^2} \int_{-R}^R dx \tfrac{1}{3} (\sqrt{R^2 - x^2})^3$$
$$= \frac{2mR^2}{3\pi} \int_{-1}^1 (\sqrt{1-\xi^2})^3 d\xi = \frac{mR^2}{4} \ . \tag{4}$$

Das Problem ist symmetrisch für x und y. Somit ist die Lösung um die y-Achse dieselbe: $I_y = \frac{mR^2}{4}$

(c) $\boxed{\text{1 Punkt}}$ *I um neue vertikale Achse*
Aus dem Steinerschen Satz folgt:

$$I_v = md^2 + I_{\text{cm}} = mR^2 + \frac{1}{2}mR^2 = \frac{3}{2}mR^2 \tag{5}$$

(d) $\boxed{\text{1 Punkt}}$ *I um neue vertikale Achse mittels direkter Berechnung*
Wir parametrisieren den Kreis durch k und ϕ,wobei k der Abstand zur Achse ist. Der „Satz des Thales“ verrät uns, dass die obere Grenze der k-Integration $2R\sin\phi$ ist. Daher:

$$I_v = \int \rho k^2 dA = \frac{m}{\pi R^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \int_0^{2R\sin\phi} dk \, k^3 = \frac{4mR^2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \sin^4\phi$$
$$= \frac{3mR^2}{2} \tag{6}$$

(e) $\boxed{\text{2 Punkte}}$ *Gebohrtes Loch*
Der Trick hier ist, das Loch als zusätzlichen Teller mit negativer Masse zu betrachten, der auf den ursprünglichen Teller geklebt wird. Der Loch-Teller hat die Masse

$$-\rho\pi q^2 = -m\frac{q^2}{R^2} \tag{7}$$

Um seinen eigenen Massenschwerpunkt gilt:

$$I_{hz} = -m\frac{q^4}{2R^2} \qquad I_{hx} = I_{hy} = -m\frac{q^4}{4R^2} \tag{8}$$

Zieht man nun den Abstand zum Massenschwerpunkt des ursprünglichen Tellers in Betracht, so gilt um diesen Punkt:

$$I_{hz} = -m\frac{q^2r^2}{R^2} - m\frac{q^4}{2R^2}\,, \qquad I_{hx} = -m\frac{q^4}{4R^2}\,, \qquad I_{hy} - m\frac{q^2r^2}{R^2} - m\frac{q^4}{4R^2} \tag{9}$$

Das Gesamtträgheitsmoment ist somit gegeben als die Summe der beiden Teller:

$$\begin{aligned} I_z &= \frac{mR^2}{2}\left(1 - \frac{q^4}{R^4} - \frac{2q^2r^2}{R^4}\right) \\ I_x &= \frac{mR^2}{4}\left(1 - \frac{q^4}{R^4}\right) \\ I_y &= \frac{mR^2}{4}\left(1 - \frac{q^4}{R^2} - \frac{4q^2r^2}{R^4}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

Wenn das Loch als klein angenommen wird, kann man die q^4 Terme vernachlässigen.

(f) $\boxed{\text{1 Punkt}}$ *Rotation um x-Achse*

$$E = \tfrac{1}{2} I_x \omega^2 = \frac{mR^2\omega^2}{8} \tag{11}$$

(g) $\boxed{\text{1 Punkt}}$ *Auf dem Boden rollen*
Wenn etwas rollt, ist der Punkt, der den Boden berührt stationär, somit ist $v = -\omega R$ (d.h. die Geschwindigkeit folgt allein aus der Drehbewegung). Die kinetische Energie ist gegeben durch:

$$T = T_{\text{rot}} + T_{\text{trans}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_z\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mR^2(-\tfrac{v}{R})^2 = \frac{3}{4}mv^2 \tag{12}$$

Lösung der Aufgabe 2

(a) $\boxed{\text{2 Punkte}}$ *Trägheitsmoment des Polygons*
Verwende die Symmetrie des Problems und teile das Polygon in N Dreiecke. Jedes Dreieck hat zwei Ecken an den Endpunkten einer Seite des Polygons und die dritte Ecke liegt im Zentrum des Polygons. Damit ist das Trägheitsmoment des Polygons die Summe der N Trägheitsmomente der einzelnen Dreiecke: $I_N = NI_{\text{tri}}$.

Ein Dreick hat die Fläche A/N und einen Öffnungswinkel (vom Zentrum aus gesehen) von $2\pi/N$. Sein Trägheitsmoment beträgt:

$$I_{\text{tri}} = \int dm\ r^2 = \mu \int_0^b dy \int_{-y\tan(\pi/N)}^{y\tan(\pi/N)} dx\ (x^2+y^2) \tag{13}$$
$$= 2\mu \int_0^b dy \int_0^{y\tan(\pi/N)} dx\ (x^2+y^2)\ , \tag{14}$$

wobei $\mu = m/A$ die konstante Massendichte und b der kürzeste Abstand zwischen dem Zentrum und dem Rand des Polygons ist. b erfüllt folgende Bedingung: $b^2 = (A/N)(1/\tan(\pi/N))$. Das Ausführen des Integrals ist einfach und ergibt:

$$\begin{aligned} I_{\text{tri}} &= 2(m/A) \int_0^b dy \left(\frac{1}{3}y^3\tan^3(\pi/N) + y^3\tan(\pi/N)\right) \\ &= 2(m/A)\tan(\pi/N)\left(\frac{1}{3}\tan^2(\pi/N)+1\right)\frac{1}{4}b^4 \\ &= \frac{mA}{2N^2}\left[\frac{\tan(\pi/N)}{3} + \frac{1}{\tan(\pi/N)}\right] . \end{aligned} \tag{15}$$

Multiplitkation mit N ergibt letztendlich:

$$I_N = \frac{mA}{2}\left[\frac{\tan(\pi/N)}{3N} + \frac{1}{N\tan(\pi/N)}\right] . \tag{16}$$

(b) $\boxed{\text{2 Punkte}}$ *Reproduzieren eines Quadrats und eines Kreises*
Setzen wir $N = 4$ und verwenden $\tan(\pi/4) = 1$, ergibt sich:

$$I_{\text{Quadrat}} = I_4 = \frac{mA}{2}\left[\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right] = \frac{mA}{6}\ , \tag{17}$$

Dies ist das Trägheitsmoment eines Quadrats um die senkrechte Achse durch den Mittelpunkt.
Im Limit $N \to \infty$ wird das Polygon zu einem perfekten Kreis. Dabei strebt der Term $\frac{\tan(\pi/N)}{3N}$ gegen Null, während $\frac{1}{N\tan(\pi/N)}$ gegen $1/\pi$ konvergiert. Damit ergibt sich:

$$I_{\text{Kreis}} = \lim_{N\to\infty} I_N = \frac{mA}{2}\left[0+\frac{1}{\pi}\right] = \frac{mA}{2\pi}\ . \tag{18}$$

Lösung der Aufgabe 3

(a) $\boxed{\text{2 Punkte}}$ *Position des Massenschwerpunkts*

$$\begin{aligned} x_{\text{cm}}(\theta) &= R\,\theta - (R-h)\sin\theta\ , \\ y_{\text{cm}}(\theta) &= R - (R-h)\cos\theta\ , \end{aligned} \tag{19}$$

(b) $\boxed{\text{2 Punkte}}$ *Potentielle Energie*

$$U = mgy_{\text{cm}} = mg[R - (R-h)\cos\theta] \approx mgh + \frac{1}{2}(R-h)\theta^2 \tag{20}$$

Durch die Annahme $h < R$ ist die potentielle Energie eine Parabel mit dem Minimum am Gleichgewichtspunkt $\theta = 0$. Dadurch, dass dort ein Minimum ist, sind Oszillationen um den Gleichgewichtspunkt stabil.

(c) $\boxed{\text{2 Punkte}}$ *Kinetische Energie*
Beachte, dass die kinetische Energie zwei Beiträge hat: einen von der translatorischen und einen von der rotatorischen Bewegung!

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}_{\text{cm}}^2 + \dot{y}_{\text{cm}}^2)^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2\left[\left(\frac{x_{\text{cm}}}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{y_{\text{cm}}}{d\theta}\right)^2\right] + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2\left[R^2 + (R-h)^2 - 2R(R-h)\cos\theta\right] + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \\ &\approx \frac{1}{2}mh^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \end{aligned} \tag{21}$$

Wir vernachlässigen hier den Term θ^2 in der Entwicklung des Cosinus, da bereits der Vorfaktor $\dot{\theta}^2$ als klein angenommen wird in der Kleinwinkelnäherung.

(d) $\boxed{\text{2 Punkte}}$ *Bestimmung der Frequenz*
Mit dem Langrangian $L = T - U$ berechnen wir (natürlich!) die Euler-Lagrange-Gleichung

$$(I + mh^2)\ddot{\theta} + mg(R-h)\theta = 0\ . \tag{22}$$

Diese Gleichung kann in der Form $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$ geschrieben werden, die einen harmonischen Oszillator mit der Frequenz

$$f = \frac{1}{2\pi}\omega = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mg(R-h)}{I + mh^2}} \tag{23}$$

beschreibt.