Klassische Theoretische Physik II

Institut für Theoretische Physik

Vorlesung: Prof. Dr. Dieter Zeppenfeld; Übung: Dr. Maximilian Löschner

Übungsblatt 1

SoSe 2020

Abgabe: Freitag, 1. 5. 2020 bis 12:00

Die Abgabe der Blätter soll durch Upload im ILIAS-Kurs *Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik II* erfolgen. Weitere Informationen zur Vorlesung und dem Übungsbetrieb finden Sie auch auf *https://www.itp.kit.edu/courses/ss2020/theob/start*.

Aufgabe 1. 6 P.

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke und geben Sie die Ergebnisse in Vektor- und Komponentenschreibweise an:

(a) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d})$ (2 P.)

(b) $\vec{\nabla} \times (\vec{r} \times \vec{a})$ (2 P.)

(c) $\vec{\nabla} \cdot \big(\vec{a} \times (\vec{r} \times \vec{b})\big)$ (2 P.)

wobei $\vec{r}_i = x_i$ und $\vec{\nabla}_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ist.
Hinweis: $(\vec{a} \times \vec{b})_k = \varepsilon_{ijk} a_i b_j$ und $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$. Hierbei bezeichnet ε_{ijk} das Levi-Civita-Symbol und über doppelt vorkommende Indices wird summiert.

Aufgabe 2. 8 P.

Betrachten Sie die homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$y'(x) = \alpha(x) y(x). \tag{1}$$

Nun sei $A(x)$ eine beliebige Stammfunktion von $\alpha(x)$, d.h. es gelte $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} A(x) = \alpha(x)$.

(a) Zeigen Sie zunächst, dass

$$y(x) = C \exp(A(x))$$

eine Lösung der Differentialgleichung (1) ist. Die Konstante C lässt sich gegebenenfalls aus der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ bestimmen. (2 P.)

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen unter Beachtung der gegebenen Anfangsbedingung:

(b) $x y'(x) + y(x) = 0, \quad y(1) = 2,$ (2 P.)

(c) $y'(x) + \cos(x) y(x) = 0, \quad y(0) = 1,$ (2 P.)

(d) $x y'(x) + (1 - x^2) y(x) = 0, \quad y(1) = 1.$ (2 P.)

Aufgabe 3. 6 P.

Raketen werden durch den Impuls der aus der Rakete ausgestoßenen Gase angetrieben. Die Masse der Rakete nimmt dabei in dem Maß ab, in dem Treibstoff verbraucht wird.

(a) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung für eine Rakete, die in einem homogenen Gravitationsfeld bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes vertikal aufwärts abgeschossen wird, gegeben ist durch

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -v_r\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} - mg.$$

Dabei sei m die Masse der Rakete und v_r die Geschwindigkeit der austretenden Gase relativ zur Rakete. (2 P.)

(b) Integrieren Sie diese Gleichung und bestimmen Sie so die Geschwindigkeit der Rakete $v(t)$ über ihre momentane Masse $m(t)$. Nehmen Sie dabei an, dass der Masseverlust proportional zur Zeit ist. (2 P.)

(c) Zeigen Sie, dass für eine Rakete, welche die Fluchtgeschwindigkeit $v_F = 11\,300\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ erreichen soll, das Gewichtsverhältnis zwischen vollgetankter und leerer Rakete bei etwa 300 liegen muss. Nehmen Sie dabei an, dass die Rakete aus der Ruhelage startet mit $v_r = 2070\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und einem Masseverlust von $1/60$ pro Sekunde. (2 P.)

Hinweis: Nehmen Sie an, dass $g\,t_F \approx g\,t_{\text{end}}$, wobei t_F die Zeit bis zum Erreichen von v_F und t_{end} die Zeit ist, nach der die gesamte Startmasse der Rakete verbraucht ist.