Klassische Theoretische Physik II

Institut für Theoretische Physik

Vorlesung: Prof. Dr. Dieter Zeppenfeld; Übung: Dr. Maximilian Löschner

Übungsblatt 2 SoSe 2020

Abgabe: Freitag, 8. 5. 2020 bis 12:00

Die Abgabe der Blätter erfolgt durch Upload in Ihrem ILIAS-Tutorium *Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik II*.

Aufgabe 1. 6 P.

Betrachten Sie ein ausgestrecktes Seil der Masse m und der Länge l, dass über eine Tischkante nach unten abgleitet. Die Reibung des aufliegenden Anteils des Seiles sei vernachlässigbar und das Seil soll seiner Biegung keinen Widerstand entgegensetzen. Es sei $x(t)$ die Länge des Seilstücks, das zur Zeit t vom Tisch herabhängt.

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für $x(t)$ auf und lösen Sie sie für den Fall, dass das Seil zur Zeit $t = 0$ losgelassen wird, wobei ein Stück x_0 herabhängt. (3 P.)

(b) Geben Sie die Geschwindigkeit an, wenn das Seil gerade über die Tischkante rutscht. Vergleichen Sie die Gesamtenergie des Seils zu diesem Zeitpunkt mit derjenigen für $t = 0$. (3 P.)

Aufgabe 2. 6 P.

Der Zusammenhang zwischen der Darstellung eines Ortsvektors $\vec{r}$ in kartesischen und Kugel- bzw. Zylinderkoordinaten ist gegeben durch

$$\text{Kugelko.: } \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \text{Zylinderko.: } \vec{r} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix},$$

mit $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ und $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.

(a) Berechnen Sie in Kugelkoordinaten die Einheitsvektoren

$$\hat{e}_r = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right|}, \quad \hat{e}_\theta = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right|}, \quad \hat{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right|},$$

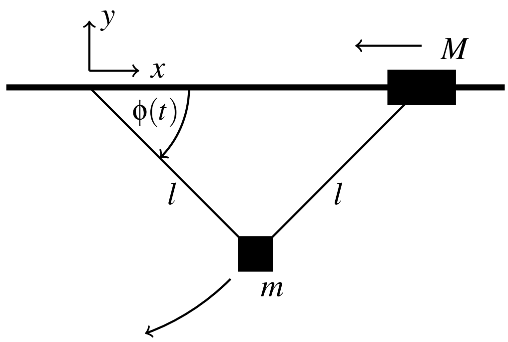
und zeigen Sie, dass diese ein Orthonormalsystem bilden. (2 P.)

(b) Nun beschreibe $\vec{r}(t)$ die Bahn eines punktförmigen Teilchens als Funktion der Zeit t. Berechnen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Teilchens in Kugelkoordinaten. Drücken Sie das Ergebnis mithilfe der Vektoren $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$ und $\hat{e}_\varphi$ aus. (2 P.)

(c) Geben Sie unter Verwendung der Ergebnisse in (a) und (b) die entsprechenden Resultate für Zylinderkoordinaten an. (2 P.)

Aufgabe 3. 5 P.

Betrachten Sie eine horizontal reibungsfrei bewegliche Box der Masse M. Eine weitere Masse m ist über eine Stange mit dem Koordinatenursprung verbunden und über eine zweite Stange mit der rutschenden Box. Beide Stangen haben die Länge l und seien masselos. Die Schwerkraft wirkt in die vertikale Richtung.



(a) Finden Sie passende verallgemeinerte Koordinaten für $\vec{x}_m(t)$ und $\vec{x}_M(t)$, mithilfe derer die Zwangsbedingungen des Systems automatisch erfüllt sind. (2 P.)

(b) Finden Sie die Lagrangefunktion $L = T - U$ für dieses System mit kinetischer Energie T und potentieller Energie U in Abhängigkeit von ϕ und $\dot{\phi}$ (2 P.)

(c) Leiten Sie mithilfe der Euler-Lagrange-Gleichung die Bewegungsgleichung für das System ab. (1 P.)

Aufgabe 4. 3 P.

Betrachten Sie zwei Lagrange-Funktionen $L(q_1 \dots q_N, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_N, t)$ und $L'(q_1 \dots q_N, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_N, t)$, die über einen zusätzlichen totalen Zeitableitungsterm zusammenhängen:

$$L'(q_1 \dots q_N, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_N, t) = L(q_1 \dots q_N, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_N, t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(q_1 \dots q_N, t).$$

Welche Eigenschaft muss die Funktion $F(q_1 \dots q_N, t)$ erfüllen, damit L und L' das gleiche physikalische System beschreiben, hinsichtlich ihrer Bewegungsgleichungen?

Hinweis: Stellen Sie dazu die totale zeitliche Ableitung von F mithilfe der Summe über partielle Ableitungen dar und verwenden dies für die Euler-Lagrange-Gleichung.