INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)

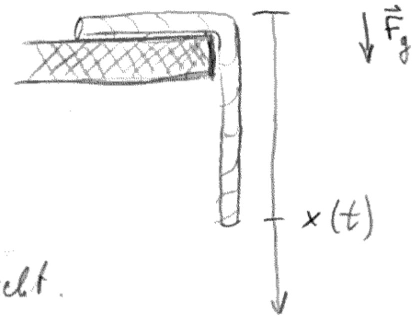
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

(1)

A1)

a) Beschleunigung wird durch Gewichtskraft des überhangenden Seilstückes bewirkt.



Masse im Überhang: $m_u = \frac{x(t)}{\ell} m$

$\Rightarrow \vec{F} = m\ddot{\vec{x}} = \frac{\vec{x}}{\ell} m g \quad , \quad t_0 < t < t_1$

mit $t_0 = 0$, t_1: Zeitpunkt zu dem das Seil ganz abrutscht.

(1) $\Rightarrow \ddot{\vec{x}} = \frac{g}{\ell}\vec{x}$; Bewegung in 1 Dim., deshalb jetzt einkomponentig:

Ansatz: $x(t) = A e^{\alpha t} \rightarrow \dot{x}(t) = \alpha A e^{\alpha t} \rightarrow \ddot{x}(t) = \alpha^2 A e^{\alpha t}$

in (1) $\Rightarrow \alpha^2 = \frac{g}{\ell} \Rightarrow \alpha_\pm = \pm\sqrt{\frac{g}{\ell}} \Rightarrow x(t) = A_+ e^{\alpha_+ t} + A_- e^{\alpha_- t}$

Anfangsbed.: $\left.\begin{array}{l} x(0) = x_0 = A_+ + A_- \\ \dot{x}(0) = 0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}(A_+ - A_-) \end{array}\right\} \Rightarrow A_+ = A_- = \frac{x_0}{2}$

$\Rightarrow$ Lösung: $x(t) = \frac{x_0}{2}\left(e^{\sqrt{\frac{g}{\ell}}t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{\ell}}t}\right) = x_0 \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right)$

b) $\dot{x}(t_1)$? t_1 festgelegt durch $x(t_1) = \ell$

$\dot{x}(t_1) = \sqrt{\frac{g}{\ell}}\, x_0 \sinh\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t_1\right)$ $\qquad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

Betrachte nun $[\dot{x}(t_1)]^2 = \frac{g}{\ell}x_0^2 \sinh^2\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t_1\right) \overset{!}{=} \frac{g}{\ell}x_0^2\left[\underbrace{\cosh^2\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t_1\right)}_{=x(t_1)^2 = \ell^2} - 1\right]$

$= \frac{g}{\ell}\left[\ell^2 - x_0^2\right]$

$\Rightarrow \dot{x}(t_1) = \sqrt{\frac{g}{\ell}}\sqrt{\ell^2 - x_0^2}$

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

A1F)

gesamte Masse

bF) Kinetische Energie $T = \frac{m}{2}\dot{x}(t)^2$

potentielle Energie gegeben durch überhängende Masse $\frac{x(t)}{\ell}m$ und

Lage des Schwerpunktes des überhängenden Stücks: $\frac{x(t)}{2}$

$$\Rightarrow \quad U = -\frac{x(t)}{2}\frac{x(t)}{\ell}m\,g = -\frac{m}{2}\frac{g}{\ell}x(t)^2$$

Vergleiche
$$\left.\begin{aligned} T(t_1) &= \frac{m}{2}\frac{g}{\ell}(\ell^2 - x_0^2) \\ U(t_1) &= -\frac{m}{2}\frac{g}{\ell}\ell^2 \end{aligned}\right\} \quad E_{ges}(t_1) = T + U = -\frac{m}{2}\frac{g}{\ell}x_0^2$$

gilt zu jedem Zeitpunkt, denn:

$$E_{ges} = T(t) + U(t) = \frac{m}{2}\left[\dot{x}(t)^2 - \frac{g}{\ell}x(t)^2\right] = x_0^2\frac{m}{2}\frac{g}{\ell}\underbrace{\left[\sinh^2\left(\sqrt{\tfrac{g}{\ell}}t\right) - \cosh^2(\ldots)\right]}_{=-1}$$

$$= -\frac{m}{2}\frac{g}{\ell}x_0^2 = \text{const.}$$

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

A2

a) $\vec{r} = r \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

$$\hat{e}_r = \frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\cdot\underbrace{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right|^{-1}}_{=1} = \underline{\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}}, \quad \hat{e}_\theta = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\cdot\underbrace{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right|^{-1}}_{=\frac{1}{r}} = \underline{\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}}$$

$$\hat{e}_\varphi = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\underbrace{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right|^{-1}}_{=\frac{1}{r\sin\theta}} = \underline{\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\hat{e}_r\cdot\hat{e}_\theta = 0, \quad \hat{e}_r\cdot\hat{e}_\varphi = 0, \quad \underline{\hat{e}_\theta\cdot\hat{e}_\varphi = 0}, \quad \underline{\hat{e}_r\cdot\hat{e}_r = \hat{e}_\theta\cdot\hat{e}_\theta = \hat{e}_\varphi\cdot\hat{e}_\varphi = 1}$$

b) $\vec{r}(t) = r(t)\,\hat{e}_r$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\,\dot{\hat{e}}_r$$

$$\text{mit } \dot{\hat{e}}_r = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \dot{\theta}\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} + \dot{\varphi}\begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + \sin\theta\,\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \underline{\dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi}$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{r}\,\hat{e}_r + \dot{r}\,\dot{\hat{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r(\ddot{\theta}\,\hat{e}_\theta + \dot{\theta}\,\dot{\hat{e}}_\theta) + \dot{r}\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi + r\left[\dot{\theta}\cos\theta\,\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi + \sin\theta(\ddot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi + \dot{\varphi}\,\dot{\hat{e}}_\varphi)\right]$$

$$\text{mit } \dot{\hat{e}}_\theta = \dot{\theta}\begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi \\ -\cos\theta \end{pmatrix} + \dot{\varphi}\cos\theta\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = -\dot{\theta}\,\hat{e}_r + \cos\theta\,\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi$$

$$\dot{\hat{e}}_\varphi = \dot{\varphi}\begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = -\dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{e}_r - \dot{\varphi}\cos\theta\,\hat{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}}(t) = \left[\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right]\hat{e}_r + \left[2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2\right]\hat{e}_\theta$$

$$\underline{+ \left[2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta\right]\hat{e}_\varphi}$$

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

A2F

c) $\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} = \rho \underbrace{\hat{e}_r\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}}_{=\hat{e}_\rho} + z \underbrace{\left(-\hat{e}_\theta\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}\right)}_{=\hat{e}_z}$

wie zuvor $\hat{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_z = 0 = \hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\varphi = \hat{e}_z \cdot \hat{e}_\varphi \,, \quad \hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\rho = \hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_\varphi = \hat{e}_z \cdot \hat{e}_z = 1$

Verwende Ergebnisse aus (b) für $\theta = \frac{\pi}{2}$ (zusätzliche $z(t)$ Abhängigkeit)

$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{\rho}\,\hat{e}_\rho + \rho\,\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi + \dot{z}\,\hat{e}_z$

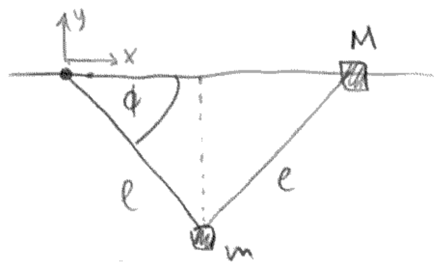
$\ddot{\vec{r}}(t) = [\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2]\hat{e}_\rho + [2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}]\hat{e}_\varphi + \ddot{z}\,\hat{e}_z$

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

(5)

A3



a) verallgemeinerte Koordinate : $q = \phi(t)$

$$\Rightarrow \vec{x}_M = \begin{pmatrix} x_M \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\ell \begin{pmatrix} \cos\phi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{x}}_M = -2\ell\dot{\phi}\begin{pmatrix} \sin\phi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_m = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ 0 \end{pmatrix} = \ell \begin{pmatrix} \cos\phi \\ -\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{x}}_m = -\ell\dot{\phi}\begin{pmatrix} \sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) $$T = T_M + T_m = \frac{M}{2}\dot{\vec{x}}_M^2 + \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}_m^2 = \frac{M}{2}4\ell^2\dot{\phi}^2\sin^2\phi + \frac{m}{2}\ell^2\dot{\phi}^2$$

$$U = mg\ell(1-\sin\phi)$$

$$\Rightarrow L = T - U = \ell^2\dot{\phi}^2\left(2M\sin^2\phi + \frac{m}{2}\right) - mg\ell(1-\sin\phi)$$

c) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}\right) = \frac{d}{dt}\left[2\ell^2\dot{\phi}\left(2M\sin^2\phi + \frac{m}{2}\right)\right] = 2\ell^2\ddot{\phi}\left(2M\sin^2\phi + \frac{m}{2}\right) + 8\ell^2M\dot{\phi}^2\sin\phi\cos\phi$$

$$\frac{\partial L}{\partial\phi} = 4\ell^2M\dot{\phi}^2\sin\phi\cos\phi + mg\ell\cos\phi$$

$$\Rightarrow \ell\ddot{\phi}(4M\sin^2\phi + m) + 4\ell\dot{\phi}^2M\sin\phi\cos\phi - mg\cos\phi = 0$$

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

A4)

Betrachte Beitrag des Zusatzterms in Euler-Lagrange-Gleichung:

$$L' - L = \frac{d}{dt} F(q_1, \dots, q_N, t) = \frac{\partial F}{\partial q_j}\dot q_j + \frac{\partial F}{\partial t} \quad \text{(Summenkonvention)}$$

E.-L.-Gl.: $$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (L'-L)}{\partial \dot q_i}\right)}_{(1)} = \underbrace{\frac{\partial (L'-L)}{\partial q_i}}_{(2)}$$

$$(1) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot q_i}\left(\frac{dF}{dt}\right)\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot q_i}\left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\dot q_j + \frac{\partial F}{\partial t}\right)\right]$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial q_i}\right] = \frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial q_i}\dot q_k + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_i}$$

$$(2) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{dF}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\dot q_j + \frac{\partial F}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j}\dot q_j + \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial t}$$

$\Rightarrow$ (1) = (2) falls die partiellen Ableitungen vertauschen.

$\Rightarrow$ $F(q_1, \dots, q_N, t)$ muss zweimal stetig partiell differenzierbar sein.

(→ Satz von Schwartz)