Klassische Theoretische Physik II

Institut für Theoretische Physik

Vorlesung: Prof. Dr. Dieter Zeppenfeld; Übung: Dr. Maximilian Löschner

Übungsblatt 3

SoSe 2020

Abgabe: Freitag, 15. 5. 2020 bis 12:00

Die Abgabe der Blätter erfolgt durch Upload in Ihrem ILIAS-Tutorium *Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik II*.

Aufgabe 1. 6 P.

Betrachten Sie die Bewegungsgleichung eines Fallschirmspringers im Schwerefeld der Erde, bevor der Schirm geöffnet wird. Näherungsweise ist diese gegeben durch

$$m\ddot{z} = -mg + \gamma\dot{z}^2.$$

(a) Finden Sie die Lösung zu dieser Gleichung mit den Anfangsbedingungen $z(0) = h$ und $\dot{z}(0) = 0$. (4 P.)

Hinweis: Lösen Sie die Gleichung zunächst für $v(t) = \dot{z}(t)$ mittels Trennung der Variablen.

(b) Nun soll die Fallhöhe insgesamt $h = 4000\,\mathrm{m}$ betragen und der Fallschirm geöffnet werden, wenn noch $1000\,\mathrm{m}$ verbleiben. Wie lange dauert dann die Phase des freien Falls? Verwenden Sie als Zahlenbeispiel $m = 80\,\mathrm{kg}$ und $\gamma = 0.3\,\mathrm{kg/m}$. (2 P.)

Aufgabe 2. 6 P.

(a) Bestimmen Sie die Rotation $\nabla \times \vec{F}$ für das Kraftfeld (2 P.)

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Berechnen Sie das Linienintegral dieses Feldes für die folgenden zwei Kurven C, die gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen werden:

(i) Ein Kreis in der x-y Ebene mit Radius R und Mittelpunkt im Ursprung. (2 P.)

(ii) Die Begrenzung der Fläche, die durch $\{(x,y,z)\,|\,z=0,\, x>0,\, y>0,\, a^2 \leq x^2+y^2 \leq R^2\}$ gegeben ist, wobei $0 < a < R$. (2 P.)

Zur Überlegung: Entsprechen die Ergebnisse Ihrer Erwartung aus (a)?

Aufgabe 3. 8 P.

Die Lorentzkraft, die auf ein elektrisch geladenes Teilchen mit Masse m und Ladung q wirkt, ist gegeben durch

$$\vec{F}_L = q\left(\vec{E}(\vec{r},t) + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r},t)\right).$$

Dabei können die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ und die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ im Allgemeinen mithilfe eines Potentials $\Phi(\vec{r},t)$ und Vektorpotentials $\vec{A}(\vec{r},t)$ geschrieben werden als

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \qquad \vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Außerdem lässt sich die Lorentzkraft bestimmen über das verallgemeinerte Potential

$$V(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) = q\left(\Phi - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}\right).$$

(a) Warum lässt sich $\vec{F}_L$ nicht als Gradient eines Potentials $V(\vec{r},t)$ schreiben? (1 P.)

(b) Betrachten Sie den Fall $\vec{B} = B\,\hat{e}_z$ und $\Phi = 0$ mit zeitlich und räumlich konstantem B.

   (i) Bestimmen Sie das zugehörige Vektorpotential $\vec{A}$ in kartesischen Koordinaten und schreiben Sie dieses Ergebnis in Zylinderkoordinaten um. (2 P.)
   Hinweis: Sie können hier natürlich die Ergebnisse des 2. Übungsblattes verwenden. Zwischenergebnis: $\vec{A} = \frac{B}{2}\rho\hat{e}_\varphi$.

   (ii) Bestimmen Sie daraus das verallgemeinerte Potential $V(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)$ in kartesischen und Zylinderkoordinaten. Schreiben Sie damit die Lagrange-Funktion in Zylinderkoordinaten. (1 P.)

(c) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen. Welche Variablen sind zyklisch und welche Größen sind folglich erhalten? (2 P.)

(d) Finden Sie die Lösungen der Bewegungsgleichungen für konstantes ρ. (2 P.)