Blatt 3

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

(1)

A1)

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

a) $m\ddot{z} = -mg + \gamma \dot{z}^2$, $z(0) = h$, $\dot{z}(0) = 0$

mit $v(t) = \dot{z}(t)$

$\Rightarrow \dot{v} = -g + \frac{\gamma}{m} v^2 \Rightarrow \frac{\dot{v}}{1 - \frac{\gamma}{mg} v^2} = -g$

$\Rightarrow \int dv \frac{1}{1 - \frac{\gamma}{mg} v^2} = -gt + C = \sqrt{\frac{mg}{\gamma}} \int du \frac{1}{1-u^2} = \sqrt{\frac{mg}{\gamma}} \operatorname{artanh}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{mg}} v\right)$

$v(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$\Rightarrow v(t) = -\sqrt{\frac{mg}{\gamma}} \tanh\left(\sqrt{\frac{\gamma g}{m}} t\right)$

$\Rightarrow z(t) = -\sqrt{\frac{mg}{\gamma}} \sqrt{\frac{m}{\gamma g}} \int du' \tanh(u') = -\frac{m}{\gamma} \int du' \frac{e^{u'} - e^{-u'}}{e^{u'} + e^{-u'}}$

Substitution: $w = e^{u'} + e^{-u'}$, $\frac{dw}{du'} = e^{u'} - e^{-u'}$

$= -\frac{m}{\gamma} \int dw \frac{1}{w} = -\frac{m}{\gamma} \ln w + C' = -\frac{m}{\gamma} \ln\left[\cosh\left(\sqrt{\frac{\gamma g}{m}} t\right)\right] + \underbrace{\ln 2 + C'}_{= C''}$

Anfangsbed.: $z(0) = h \Rightarrow C'' = h$

$= h - \frac{m}{\gamma} \ln\left[\cosh\left(\sqrt{\frac{\gamma g}{m}} t\right)\right]$

b) $t(z) = \sqrt{\frac{m}{\gamma g}} \operatorname{arcosh}\left[\exp\left(\frac{\gamma}{m}(h - z)\right)\right]$

$\Rightarrow t(1000\,m) = 62.3\,s$

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

A2

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

a) $$\nabla\times\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_x \frac{x}{x^2+y^2} + \partial_y \frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{x^2+y^2} + \frac{-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{-2y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

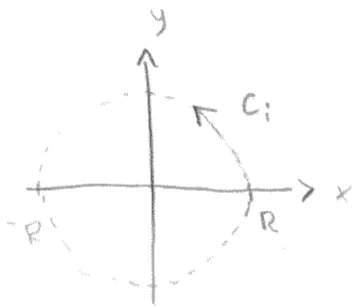
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beachte: $\vec{F}(x=0, y=0, z)$ nicht definiert!

b) (i) $$\oint_C d\vec{s}\cdot\vec{F} = \int_0^{2\pi} dt\, \frac{\partial\vec{s}}{\partial t}\cdot\vec{F}$$

$$= \int_0^{2\pi} dt \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$= \int_0^{2\pi} dt\, (\sin^2 t + \cos^2 t) = 2\pi$$



$$\rightarrow \vec{s}(t) = R\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\vec{s}}{\partial t} = R\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

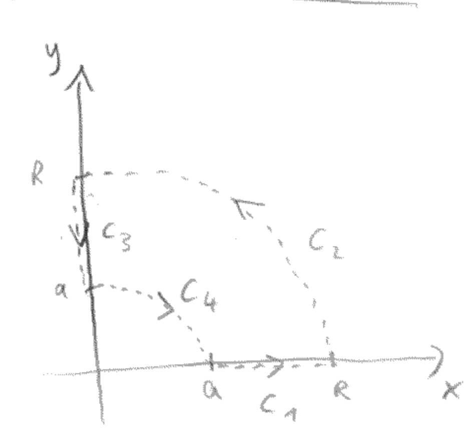
$$\vec{F}\big(x(t), y(t)\big) = \frac{1}{R}\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ii) C_1: $$\vec{s}_1(t) = \begin{pmatrix} a+(R-a)t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1$$

$$\frac{\partial\vec{s}_1}{\partial t} = (R-a)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

C_2: $$\vec{s}_2(t) = R\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\partial\vec{s}_2}{\partial t} = R\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$



INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

A2 F)

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

b, ii, F) C_3: $\vec{s}_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ R-(R-a)t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1$

$$\frac{\partial \vec{s}_3}{\partial t} = (a-R) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

C_4: $\vec{s}_4(t) = a \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\partial \vec{s}_4}{\partial t} = a \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \oint_{C_{ii}} d\vec{s} \cdot \vec{F} = \int_{C_1} d\vec{s}_1 \cdot \vec{F} + \int_{C_2} d\vec{s}_2 \cdot \vec{F} + \int_{C_3} d\vec{s}_3 \cdot \vec{F} + \int_{C_4} d\vec{s}_4 \cdot \vec{F}$$

$$= \int_0^1 dt\, (R-a) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^{\pi/2} dt \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \int_0^1 dt\, (a-R) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \cdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^{\pi/2} dt \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= 0 + \frac{\pi}{2} + 0 - \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{0}}$$

$\rightarrow$ Obwohl $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ ist das Feld $\vec{F}$ nicht konservativ. Liegt an der Polstelle bei $x = y = 0$. $\vec{F}$ ist nur "lokal" konservativ, d. h. für Integrationskurven, die die z-Achse nicht umschließen.

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

A3)

a) $\vec{F}_L$ hängt von $\dot{\vec{r}}$ ab. Diese Abhängigkeit ist nicht in $V(\vec{r},t)$ enthalten und kann auch nicht durch den Gradienten erzeugt werden.

b) $\vec{B} = B\hat{e}_z$, $\Phi = 0$

B: zeitunabhängig $\Rightarrow \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{0}$.

(i) $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \Rightarrow B\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\\partial_x A_y - \partial_y A_x\end{pmatrix}$

mögliche Wahl: $\vec{A} = \frac{B}{2}\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ in Zylinderkoord.: $\vec{x} = \begin{pmatrix}\rho\cos\varphi\\\rho\sin\varphi\\z\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{A} = \frac{B}{2}\rho\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\\cos\varphi\\0\end{pmatrix} = \frac{B}{2}\rho\,\hat{e}_\varphi$

(ii) $V(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) = q\left(\Phi - \dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}\right) \overset{\text{Blatt 2}}{=} -q\left(\dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi + \dot{z}\hat{e}_z\right)\cdot\vec{A} = -\frac{qB}{2}\rho^2\dot{\varphi}$

$= -q\begin{pmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\\\dot{z}\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}\frac{B}{2} = -\frac{qB}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})$

$L = T - V = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - V = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{qB}{2}\rho^2\dot{\varphi}$

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

AšF|

c) $L = L(\varrho, \dot{\varrho}, \dot{\varphi}, \dot{z})$

$\Rightarrow$ φ, z sind zyklische Variablen, da nicht explizit in L enthalten.

$\Rightarrow$ Erhaltungsgrößen: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0$

$\Rightarrow$ $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\varrho^2\dot{\varphi} + \frac{qB}{2}\varrho^2$ erhalten

↑ Drehimpuls $J_z = m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})_z$

↖ Zusatzterm durch mag. Induktion

$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} = p_z$: Impulserhaltung in z-Richtung

E-L-Gl für ϱ:

$$\frac{\partial L}{\partial \varrho} = m\varrho\dot{\varphi}^2 + qB\varrho\dot{\varphi} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varrho}} = \frac{d}{dt}\left[m\dot{\varrho}\right] = m\ddot{\varrho}$$

$\Rightarrow$ $\ddot{\varrho} = \varrho\left(\dot{\varphi}^2 + \frac{qB}{m}\dot{\varphi}\right)$, $\frac{qB}{m}$: Zyklotronfrequenz ω_0

d) $\varrho = \text{const.} = \varrho_0$, $\dot{\varrho} = \ddot{\varrho} = 0$

$\Rightarrow$ $0 = \dot{\varphi}^2 + \frac{qB}{m}\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\left(\dot{\varphi} + \frac{qB}{m}\right)$ $\Rightarrow$ zwei Lösungen

$\dot{\varphi}_1(t) = 0 \Rightarrow \varphi_1(t) = \text{const}$: Bewegung nur in z-Richtung.

$\dot{\varphi}_2(t) = -\frac{qB}{m} \Rightarrow \varphi_2(t) = -\frac{qB}{m}t$: Bewegung auf Kreisbahn mit Winkelfrequenz ω_0.