Klassische Theoretische Physik II

Institut für Theoretische Physik

Vorlesung: Prof. Dr. Dieter Zeppenfeld; Übung: Dr. Maximilian Löschner

Übungsblatt 4

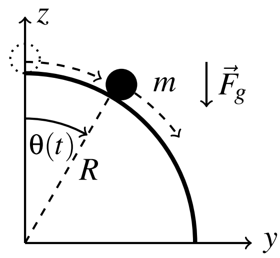
SoSe 2020

Abgabe: Freitag, 22. 5. 2020 bis 12:00

Die Abgabe der Blätter erfolgt durch Upload in Ihrem ILIAS-Tutorium *Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik II*.

Aufgabe 1. 8 P.

Ein Körper mit Masse m liege auf dem obersten Punkt einer Kugel mit Radius R und es wirke die Gewichtskraft in vertikaler Richtung. Der Körper soll nun beginnen reibungsfrei (ohne Eigenrotation) auf der Kugelfläche herabzurutschen.



(a) Finden Sie eine Ortsdarstellung für den Körper mit $r(t)$ und $\theta(t)$ als verallgemeinerten Koordinaten und stellen Sie eine Zwangsbedingung für $r(t)$ auf. (2 P.)

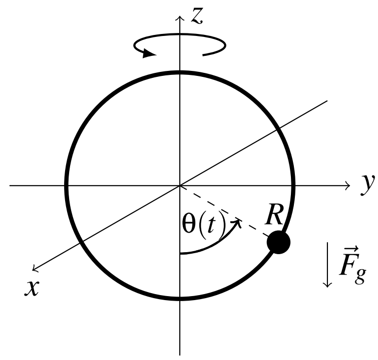
(b) Formulieren Sie die Lagrangefunktion und leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen für $r(t)$ und $\theta(t)$ her. (2 P.)
Hinweis: Wenden Sie hier den Lagrange-Formalisums 1. Art an.

(c) Bestimmen Sie die Zwangskraft $\vec{Z}_r$ in radialer Richtung. Verwenden Sie dazu die Energieerhaltung $T + U = \text{const.}$ um einen Ausdruck für $\dot{\theta}^2$ zu finden. Dies können Sie in einer der Bewegungsgleichungen verwenden und so den Lagrange-Multiplikator λ bestimmen. (2 P.)

(d) Bei welchem Winkel löst sich der Körper von der Kugeloberfläche? (2 P.)

Aufgabe 2. 8 P.

Wir betrachten einen kreisförmigen Reifen mit Radius R und Zentrum im Koordinatenursprung, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse rotiere. Eine Perle der Masse m sitze auf dem Reifen und könne reibungslos darauf entlang rutschen. Außerdem wirke die Gewichtskraft in z-Richtung.



(a) Formulieren Sie die Lagrangefunktion mit $\theta(t)$ als verallgemeinerter Koordinate und leiten Sie daraus die Bewegungsgleichung her. (2 P.)

(b) Für welche Werte von θ kann es stationäre Bahnen geben, d.h. Lösungen der Bewegungsgleichung mit $\theta = \text{const.}$? (2 P.)

(c) Die Bewegungsgleichung lässt sich auf folgende Weise schreiben:

$$\ddot{\theta} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} U_{\text{eff}}(\theta).$$

Bestimmen Sie U_{eff} und skizzieren Sie diese Funktion für die Fälle $g/R > \omega^2$, $g/R = \omega^2$ und $g/R < \omega^2$. Diskutieren Sie die Stabilität der obigen stationären Bahnen anhand des Verlaufs von U_{eff}. (2 P.)

(d) Entwickeln Sie die Bewegungsgleichung für $\theta \ll 1$ und lösen Sie diese für den Fall $g/R > \omega^2$. (2 P.)

Aufgabe 3. 4 P.

Es sei folgende Matrix gegeben:

$$M = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -8 \\ 6 & 2 & -2 \\ -8 & -2 & 9 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix M, indem Sie die Lösungen λ des sogenannten charakteristischen Polynoms

$$\det(M - \lambda \mathbb{1}) = 0$$

bestimmen. Dabei bezeichnet $\mathbb{1}$ die Einheitsmatrix. (2 P.)
Hinweis: Eine der Lösungen ist $\lambda = 3$.

b) Bestimmen Sie den normierten Eigenvektor $\hat{v}$ zum Eigenwert $\lambda = 3$. Eigenvektoren sind diejenigen Vektoren, welche die Gleichung $M\hat{v} = \lambda\hat{v}$ erfüllen. (2 P.)