

A11

76128 KARLSRUHE,  
Postfach 6380  
Tel. 07 21 / 6 08 20 81  
07 21 / 6 08 35 53

$$a) \quad \vec{r}_m = r(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta(t) \\ \cos \theta(t) \end{pmatrix} = r \hat{e}_r \Big|_{\varphi = \frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}_m = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta \quad (q_1 = r, q_2 = \theta)$$

Zwangsbedingung (Notation nach Nolting):

$$f_1(\vec{r}) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - R = 0$$

$$\bar{f}_1(r) = r - R = 0$$

$$b) \quad T = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}_m^2 = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

$$U = m g r \cos \theta$$

Lagrange-Gleichungen 1. Art:  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_m} = \sum_{i=1}^P \lambda_i a_{im}$

mit  $a_{im} = \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial q_m}$ , Hier:  $a_{11} = \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial r} = \underline{\underline{1}}$

→ zwei Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = \lambda_1 a_{11}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} (m \dot{r}) - [m r \dot{\theta}^2 - m g \cos \theta] = \lambda_1$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{m \ddot{r} - m r \dot{\theta}^2 + m g \cos \theta = \lambda_1}} \quad (1)$$

# zwangsbed.

A1F

76128 KARLSRUHE,  
Postfach 6380  
Tel. 07 21 / 6 08 20 81  
07 21 / 6 08 35 53

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \lambda_1 a_{12}$$

$$= \frac{\partial f_r}{\partial \theta} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}) - m g r \sin \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow m (2 r \dot{r} \dot{\theta} + r^2 \ddot{\theta}) = + m g r \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} = g \sin \theta \quad (2)$$

c) 3. Gleichung aus  $\sum_{m=1}^j a_{im} \dot{q}_m + b_{it} = 0$ ,  $b_{it} = \frac{\partial f_r}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow a_{11} \dot{q}_1 = \dot{r} = 0 \Rightarrow \ddot{r} = 0, r = \text{const.} = R$$

Damit erhalten wir:

$$(1): -m R \dot{\theta}^2 + m g \cos \theta = \lambda_1$$

Verwende nun Energieerhaltung, um  $\dot{\theta}^2$  zu eliminieren  
und um  $\lambda_1$  zu bestimmen:

$$E = T + U = \text{const.} \Rightarrow \frac{m}{2} R^2 \dot{\theta}^2 + m g R \cos \theta = m g R$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R} (1 - \cos \theta)$$

$\hat{=}$  potent. Energie  
zu Beginn

$$\Rightarrow \lambda_1 = -2 m g (1 - \cos \theta) + m g \cos \theta = m g (3 \cos \theta - 2)$$

$$\Rightarrow \text{Zwangs Kraft: } \vec{Z}_r = \lambda_1 \nabla_r f_1 = \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r = 3 m g \left( \cos \theta - \frac{2}{3} \right) \hat{e}_r$$

76128 KARLSRUHE,

Postfach 6380

Tel. 07 21 / 6 08 20 81

07 21 / 6 08 35 53

A1F

d) Körper löst sich von Kugeloberfläche, wenn die Zwangskraft in radiale Richtung verschwindet:

$$\vec{Z}_r = 3mg \left( \cos \Theta - \frac{2}{3} \right) \hat{e}_r = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\cos \Theta_0 = \frac{2}{3}}}$$

A21

76128 KARLSRUHE,  
Postfach 6380  
Tel. 07 21 / 6 08 20 81  
07 21 / 6 08 35 53

$$a) \quad \vec{r}_m(t) = R \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ -\cos \theta \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{r}}_m(t) = R \dot{\theta} \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \end{pmatrix} + R \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T = \frac{m}{2} (R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) = \frac{m}{2} (R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \omega^2 \sin^2 \omega t)$$

$\uparrow$  Zwangsbed.:  $\varphi(t) = \omega t = 0$

$$U = -mgR \cos \theta$$

$$\Rightarrow L = \frac{m}{2} R^2 (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta) + mgR \cos \theta$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m R^2 \ddot{\theta} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = m \omega^2 R^2 \sin \theta \cos \theta - mgR \sin \theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \sin \theta \left( \omega^2 \cos \theta - \frac{g}{R} \right)$$

$$b) \quad \dot{\theta} = 0 \text{ nur möglich wenn auch } \ddot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \sin \theta = 0, \text{ also } \theta = 0, \pi$$

$$\text{oder } \cos \theta = \frac{g}{\omega^2 R} ; \text{ nur möglich wenn } \frac{g}{\omega^2 R} \leq 1$$

$$\text{also } \omega^2 \geq \frac{g}{R}$$

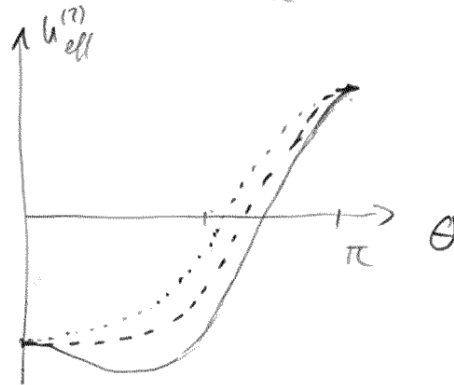
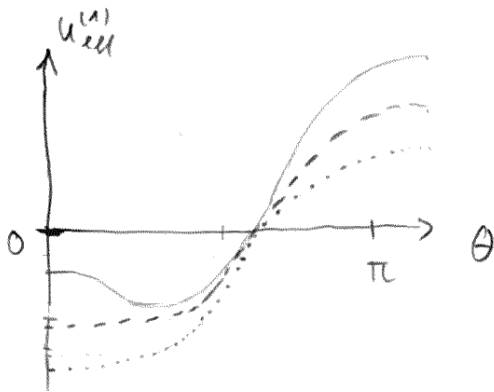
A2F

76128 KARLSRUHE,  
Postfach 6380  
Tel. 07 21 / 6 08 20 81  
07 21 / 6 08 35 53

$$c) \quad \ddot{\Theta} = -\frac{dU_{\text{eff}}}{d\Theta} = \omega^2 \sin\Theta \cos\Theta - \frac{g}{R} \sin\Theta$$

"scharfer Blick":  $U_{\text{eff}}^{(1)} = \frac{1}{2} \omega^2 \cos^2\Theta - \frac{g}{R} \cos\Theta$

(oder  $U_{\text{eff}}^{(2)} = -\frac{1}{2} \omega^2 \sin^2\Theta - \frac{g}{R} \cos\Theta$ )



- :  $\frac{g}{R} < \omega^2 \Rightarrow$  nur hier findet sich ein lokales Minimum  
---:  $\frac{g}{R} = \omega^2$  für  $\Theta \neq 0, \pi$   
....:  $\frac{g}{R} > \omega^2$

d)  $\Theta \ll 1 \Rightarrow$  Bewegungsgleichung:

$$\ddot{\Theta} \approx \Theta \left( \omega^2 - \frac{g}{R} \right) = -\Theta \left( \frac{g}{R} - \omega^2 \right)$$

$\Rightarrow$  allgemeine Lösung:  $\Theta(t) = a \cos(\Omega t) + b \sin(\Omega t)$

mit  $\Omega = \sqrt{\frac{g}{R} - \omega^2}$ , deshalb  $\frac{g}{R} > \omega^2$

A3

76128 KARLSRUHE,

Postfach 6380

Tel. 07 21 / 6 08 20 81

07 21 / 6 08 35 53

a) 
$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 6 & -8 \\ 6 & 2-\lambda & -2 \\ -8 & -2 & 9-\lambda \end{vmatrix}$$
 Entwicklung nach 1. Zeile

$$\begin{aligned} &= (7-\lambda)[(2-\lambda)(9-\lambda)-4] - 6[6(9-\lambda)-16] - 8[-12+8(2-\lambda)] \\ &= 7 \cdot 2 \cdot 9 - 7 \cdot 4 - 6^2 \cdot 9 + 6 \cdot 16 + 8 \cdot 12 - 8^2 \cdot 2 \\ &\quad + \lambda(-2 \cdot 9 + 4 - 7 \cdot 2 - 7 \cdot 9 + 6^2 + 8^2) \\ &\quad + \lambda^2(9 + 2 + 7) \\ &\quad - \lambda^3 \\ &= -\lambda^3 + 18\lambda^2 + 9\lambda - 162 \end{aligned}$$

Hinweis:  $\lambda_1 = 3 \Rightarrow$  Polynomdivision:

$$\begin{aligned} (-\lambda^3 + 18\lambda^2 + 9\lambda - 162) : (\lambda - 3) &= -\lambda^2 + 15\lambda + 54 \\ -\lambda^3 + 3\lambda^2 & \\ \hline 15\lambda^2 + 9\lambda & \\ 15\lambda^2 - 45\lambda & \\ \hline 54\lambda - 162 & \\ 54\lambda - 162 & \\ \hline & \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_{2/3} = \frac{1}{2}(15 \pm \sqrt{15^2 + 4 \cdot 54}) \Rightarrow \underline{\lambda_2 = -3}, \underline{\lambda_3 = 18}$$

A3F)

76128 KARLSRUHE,  
Postfach 6380  
Tel. 07 21 / 6 08 20 81  
07 21 / 6 08 35 53

b) Suche Eigenvektor zu  $\lambda_1 = 3$ , also  $\vec{v}$  so dass

$$M\vec{v} = 3\vec{v} = 3 \cdot \mathbb{1}\vec{v} \Leftrightarrow (M - 3 \cdot \mathbb{1})\vec{v} = \vec{0}$$

z.B. über Gauß'sches Eliminationsverfahren:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & -8 & 0 \\ 6 & -1 & -2 & 0 \\ -8 & -2 & 6 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(-\frac{3}{2})z_1 + z_2 \\ 2z_1 + z_3}} \left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & -8 & 0 \\ 0 & -10 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & -10 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{z_2 \cdot (-\frac{1}{10}) \\ z_2 + z_3}} \left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\quad}_{= M - 3 \cdot \mathbb{1}}$  wird jetzt weggelassen

$$\xrightarrow{-6z_2 + z_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{z_1 : \frac{1}{4}} \underbrace{\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)}_{(*)} \xrightarrow{"(-1) \cdot \text{Ergänzungstrick!"}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\quad}_{= \vec{v}}$

$\vec{v}$  ist nur bis auf beliebige Phase  $\alpha$  bestimmt, also ist  $\vec{v}' = \alpha \vec{v}$  auch EV.

Wähle z.B.  $\alpha = -1 \Rightarrow \vec{v}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{v}' = \frac{\vec{v}'}{|\vec{v}'|} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Check: (\*) steht für das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 1 \cdot v_1 - \frac{1}{2} v_3 &= 0 & \Rightarrow v_1 &= \frac{v_3}{2} \Rightarrow v_{\text{check}} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark \\ 1 \cdot v_2 - 1 \cdot v_3 &= 0 & \Rightarrow v_3 &= v_2 \end{aligned}$$