Klassische Theoretische Physik II

Institut für Theoretische Physik

Vorlesung: Prof. Dr. Dieter Zeppenfeld; Übung: Dr. Maximilian Löschner

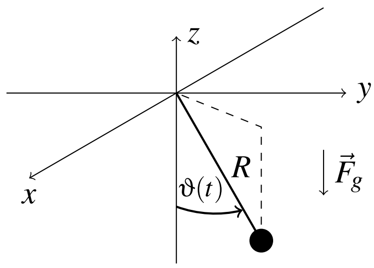
Übungsblatt 5 SoSe 2020

Abgabe: Freitag, 29. 5. 2020 bis 12:00

Die Abgabe der Blätter erfolgt durch Upload in Ihrem ILIAS-Tutorium *Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik II*.

Aufgabe 1. 8 P.

Wir betrachten eine Masse M an einem Fadenpendel mit Länge R und Aufhängung im Koordinatenursprung, das frei in alle Richtungen schwingen kann, also nicht auf eine Ebene fixiert ist. Es wirke die Schwerkraft $\vec{F}_g$ in die vertikale Richtung.



(a) Wählen Sie geeignete verallgemeinerte Koordinaten und schreiben Sie die Lagrange-Funktion auf. Welche der verallgemeinerten Koordinaten ist zyklisch? (2 P.)

(b) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen und die Erhaltungsgröße zur zyklischen Variable. (1 P.)

(c) Stellen Sie einen Zusammenhang der gefundenen Erhaltungsgröße mit der z-Komponente des Drehimpulses $\vec{J} = M\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ her. Verwenden Sie das Ergebnis zur Vereinfachung der Euler-Lagrange-Gleichung für den Ausschlagwinkel. (2 P.)

(d) Bringen Sie die Bewegungsgleichung für den Ausschlagwinkel durch Multiplikation mit der Geschwindigkeit $\dot{\vartheta}$ in die Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[g(\vartheta, \dot{\vartheta})\right] = 0.$$

Identifizieren sie die gefundene Funktion $g(\vartheta, \dot{\vartheta})$ mit der Gesamtenergie des Systems. (1 P.)

(e) Bestimmen Sie in der Gesamtenergie des Systems den Beitrag eines effektiven Potentials $U_{\text{eff}}(\vartheta)$, also von Geschwindigkeiten unabhängige Terme. Über die Definition $\hat{U}(\vartheta) = U_{\text{eff}}(\vartheta)/(MgR)$ können Sie ein dimensionsloses effektives Potential finden (Dimensionslosigkeit überprüfen!). Nennen Sie den darin auftretenden dimensionslosen Faktor α und skizzieren Sie $\hat{U}(\vartheta)$ für $\alpha = 1$. Was schließen Sie aus der Form des Potentials für die Bewegung des Pendels? (2 P.)

Aufgabe 2. 9 P.

Wir möchten mittels Variationsrechnung die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten P_a und P_b auf einer Kugeloberfläche mit Kugelradius R betrachten. Verwenden Sie die Kugelkoordinaten von Übungsblatt 2.

(a) Bestimmen Sie das Längenelement $\mathrm{d}s$ und die Größe $\mathrm{d}s/\mathrm{d}\theta$ aus $\mathrm{d}s^2 = \sum_i \mathrm{d}x_i^2$ in Kugelkoordinaten für einen festen Radius. (2 P.)

(b) Bestimmen Sie damit das Funktional

$$J[\phi] = \int_{P_a}^{P_b} \mathrm{d}s = \int_{\theta_a}^{\theta_b} \mathrm{d}\theta \, f(\phi, \phi', \theta),$$

wobei $\phi = \phi(\theta)$ und $\phi' = \mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\theta$ sein soll. (1 P.)

(c) Zeigen Sie, dass ϕ eine zyklische Variable ist und bestimmen Sie die zugehörige Erhaltungsgröße A. Schreiben Sie das Ergebnis als eine Differentialgleichung der Form $\phi' = g(A, \theta)$. Welche Verbindungslinie ergibt sich daraus für $A = 0$ und wie würden die zugehörigen Punkte P_a und P_b liegen? (2 P.)

(d) Nun sollen Sie für allgemeines A zeigen, dass der Kurvenverlauf in einer Ebene liegt.

(i) Erklären Sie ohne Rechnung durch welche drei charakteristischen Punkte diese Ebene verlaufen wird. (1 P.)

(ii) Die Ebene lässt sich durch die Bedingung $\hat{n} \cdot \vec{r}(\theta) = 0$ charakterisieren. Dabei ist $\hat{n}$ ein Normalenvektor der sich durch

$$\hat{n} = \frac{1}{R} \vec{r}(\theta) \times \hat{t}(\theta)$$

mit dem Tangentenvektor $\vec{t} = \frac{1}{R} \frac{\mathrm{d}\vec{r}(\theta)}{\mathrm{d}\theta}$ bestimmen lässt. Normieren Sie diesen Vektor und zeigen Sie damit, dass $\hat{n}$ konstant ist, also nicht von θ abhängt. (3 P.)

Hinweis: Im normierten Tangentenvektor $\hat{t}$ sollte die Konstante A als globaler Faktor auftauchen. In $\frac{\mathrm{d}\hat{n}}{\mathrm{d}\theta}$ sollten Sie dann auf Terme der Form $\phi'' \sin\theta$ stoßen. Diese können Sie eliminieren, indem Sie $\frac{\mathrm{d}(A^2)}{\mathrm{d}\theta}$ bilden und bedenken, das A eine Erhaltungsgröße ist.

Aufgabe 3. 3 P.

Wir betrachten die Drehmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

a) Für welche Drehwinkel α hat A reelle Eigenwerte? Wie können Sie das anschaulich interpretieren? (2 P.)

b) Bestimmen Sie die (komplexen) Eigenvektoren zu A. (1 P.)