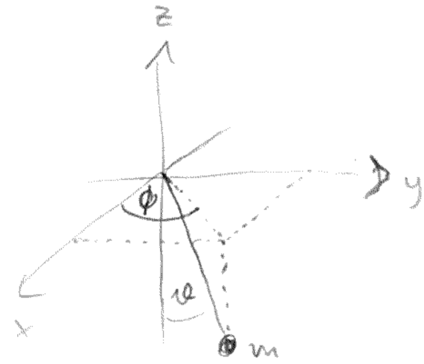
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

A1

a) Winkel θ in Kugelkoordinaten üblicherweise von positiver z-Achse aus gemessen



Hier: $\theta = \pi - \vartheta \Rightarrow \sin(\pi-\vartheta) = \sin\vartheta$

$\cos(\pi - \vartheta) = -\cos\vartheta$

$$\Rightarrow \vec{x}_M = R \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\phi \\ \sin\vartheta\sin\phi \\ -\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

von Blatt 2, A2: $\dot{\vec{r}} = \dot r \hat e_r + r\dot\theta \hat e_\theta + r\sin\theta\,\dot\phi\,\hat e_\phi$

$$\Rightarrow \dot{\vec{x}}_M = -R\dot\vartheta\,\hat e_\theta\big|_{\theta=\pi-\vartheta} + R\sin\vartheta\,\dot\phi\,\hat e_\phi\,,$$

$$\text{mit } \hat e_\theta\big|_{\theta=\pi-\vartheta} = \hat e_\vartheta = \begin{pmatrix} -\cos\vartheta\cos\phi \\ -\cos\vartheta\sin\phi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad \hat e_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{x}}_M = R \begin{pmatrix} \dot\vartheta\cos\vartheta\cos\phi - \dot\phi\sin\vartheta\sin\phi \\ \dot\vartheta\cos\vartheta\sin\phi + \dot\phi\sin\vartheta\cos\phi \\ \dot\vartheta\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{x}}_M^{\,2} = R^2\left(\dot\vartheta^2 + \dot\phi^2\sin^2\vartheta\right)$$

$$T = \frac{M}{2}\dot{\vec{x}}_M^{\,2} = \frac{MR^2}{2}\left(\dot\vartheta^2 + \dot\phi^2\sin^2\vartheta\right)$$

$$U = MgR(1-\cos\vartheta)$$

so dass $U = 0$ am untersten Punkt. Wahl jedoch beliebig.

$$L = MR\left[\frac{R}{2}\left(\dot\vartheta^2 + \dot\phi^2\sin^2\vartheta\right) + g(\cos\vartheta - 1)\right] = L(\vartheta, \dot\vartheta, \dot\phi)$$

$\Rightarrow \phi$ ist zyklische Variable.

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

A1F

b) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = MR^2\left(\ddot{\vartheta} - \dot{\phi}^2 \sin\vartheta\cos\vartheta\right) + MgR\sin\vartheta = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = \frac{d}{dt}\left[\underbrace{MR^2\dot{\phi}\sin^2\vartheta}\right] = MR^2\left(\ddot{\phi}\sin^2\vartheta + 2\dot{\phi}\dot{\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta\right) = 0$$

p_ϕ als Erhaltungsgröße

c) $$(\vec{J})_z = M(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})_z = M(x\dot{y} - y\dot{x}) =$$

$$= MR^2 \sin\vartheta\left[\cos\phi\left(\cos\vartheta\sin\phi\,\dot{\vartheta} + \dot{\phi}\sin\vartheta\cos\phi\right) - \sin\phi\left(\cos\vartheta\cos\phi\,\dot{\vartheta} - \dot{\phi}\sin\vartheta\sin\phi\right)\right]$$

$$= MR^2\dot{\phi}\sin^2\vartheta$$

$$\Rightarrow \dot{\phi}^2 = \frac{J_z^2}{(MR^2\sin^2\vartheta)^2}$$

$$\Rightarrow (1):\quad MR^2\left(\ddot{\vartheta} - \frac{J_z^2}{M^2R^4}\frac{\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta}\right) + MgR\sin\vartheta = 0$$

$$MR^2\ddot{\vartheta} - \frac{J_z^2}{MR^2}\frac{\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta} + MgR\sin\vartheta = 0$$

↳ reine ϑ-DGL

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

A1F)

d) ϑ-DGL umformen in Zeitableitung durch Multiplikation mit $\dot\vartheta$: benutze $\dot\vartheta\ddot\vartheta = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\dot\vartheta^2\right]$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\Big[\underbrace{\frac{MR^2}{2}\dot\vartheta^2 + \frac{J_z^2}{2MR^2}\frac{1}{\sin^2\vartheta} - MgR\cos\vartheta}_{=g(\vartheta,\dot\vartheta)}\Big] = 0$$

Energie: $E = T + U = \frac{MR^2}{2}\dot\vartheta^2 + \frac{J_z^2}{2MR^2}\frac{1}{\sin^2\vartheta} + MgR(1-\cos\vartheta)$

$\to U_0$

Identisch mit $g(\vartheta,\dot\vartheta)$ bis auf Konstante Verschiebung U_0.

(~~Sp~~ Wahl des Energienullpunkts spielt für Bewegungsgl. keine Rolle)

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

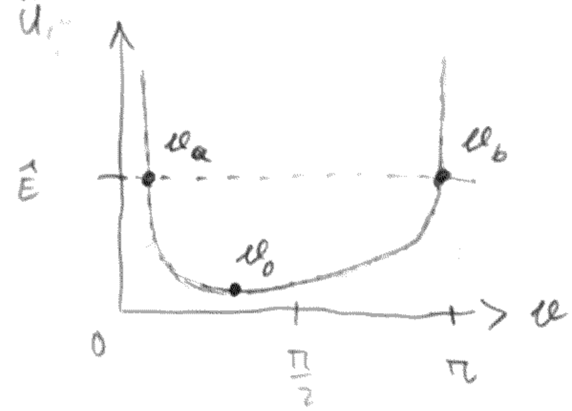
A1F

e) $\dot{\vartheta}$-unabhängige Terme in E

$$U_{eff}(\vartheta) = \frac{J_z^2}{2MR^2}\,\frac{1}{\sin^2\vartheta} + MgR(1-\cos\vartheta)$$

$$\Rightarrow \hat{U}(\vartheta) = \frac{U_{eff}}{MgR} = \underbrace{\frac{J_z^2}{2M^2R^3g}}_{=\alpha}\,\frac{1}{\sin^2\vartheta} + 1 - \cos\vartheta$$

Plot für $\alpha = 1$:



ϑ_a, ϑ_b: Umkehrpunkte des Pendels bei fester Energie $\hat{E}$

ϑ_0: Ruhelage des Pendels ($\dot{\vartheta} = 0$) für festen Drehimpuls $J_z \neq 0$

$$[\alpha] = \frac{[J_z]^2}{[M^2R^3g]} = \frac{[m\cdot r\cdot v]^2}{kg^2\, m^3\, \frac{m}{s^2}} = \frac{m^2\, m^2/s^2}{m^4/s^4} = 1$$

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

A2)

a) Punkte auf Kugeloberfläche

$\sum_i x_i^2 = R^2$ → Verwende Kugelkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi\, d\theta - \sin\theta\sin\phi\, d\phi \\ \cos\theta\sin\phi\, d\theta + \sin\theta\cos\phi\, d\phi \\ -\sin\theta\, d\theta \end{pmatrix}$$

$$\left[\text{aus } dx_i = \frac{\partial(x_i)}{\partial(\theta,\phi)}\, d(\theta,\phi)\right]$$

$$\Rightarrow ds^2 = R^2\left[c_\theta^2 c_\phi^2\, d\theta^2 + s_\theta^2 s_\phi^2\, d\phi^2 + c_\theta^2 s_\phi^2\, d\theta^2 + s_\theta^2 c_\phi^2\, d\phi^2 + s_\theta^2\, d\theta^2\right]$$

$$= R^2\left[\sin^2\theta\, d\phi^2 + d\theta^2\right]$$

$$\Rightarrow ds = R\sqrt{\sin^2\theta\, d\phi^2 + d\theta^2} \Rightarrow \frac{ds}{d\theta} = R\sqrt{\sin^2\theta \underbrace{\left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^2}_{=\phi'^2} + 1}$$

b) $$J[\phi] = \int_{P_a}^{P_b} ds = \int_{\theta_a}^{\theta_b} d\theta \frac{ds}{d\theta} = \int_{\theta_a}^{\theta_b} d\theta\, \underbrace{R\sqrt{1+\sin^2\theta\, \phi'^2}}_{= f(\phi',\theta)}$$

A2F 6)

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)

Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

c) Euler-Lagrange: ($\theta \hat{=} t$)

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial \phi'}\right) - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \phi}}_{=0} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \phi'} = A \text{ ist erhalten.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \phi'} = \frac{\phi' \sin^2\theta}{\sqrt{1+\phi'^2\sin^2\theta}} = \underline{\underline{A}}$$

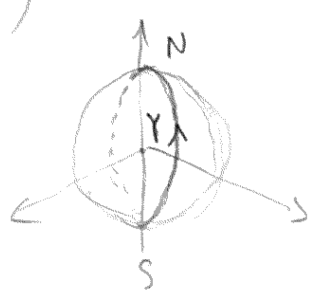
$$\Rightarrow \phi'^2 \sin^4\theta = A^2(1+\phi'^2\sin^2\theta) \Rightarrow \phi'^2(\sin^4\theta - A^2\sin^2\theta) = A^2$$

$$\Rightarrow \phi' = \pm \frac{A}{\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta - A^2}}$$

d.h. für $A = 0 \Rightarrow \phi' = 0$, also $\phi = \text{const}$.

Also entsprechen die Pfade $\gamma(\theta) = R\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta\end{pmatrix}$ den

Längengraden auf einem Globus.



Die Punkte $P_{a/b}$ würden also auf diesen Pfaden liegen.

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

A2F)

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

d) (i) Anschaulich ist klar, dass die kürzeste Verbindung zw. P_a und P_b der kürzere Teil eines Großkreises auf der Kugeloberfläche ist. Großkreise sind die Schnittkurven der Kugeloberfläche mit Ebenen, die durch den Koordinatenursprung laufen.

$\Rightarrow$ drei charakteristische Punkte: $\{P_a, P_b, \vec{0}\}$.

ii) $$\vec{t} = \frac{1}{R}\frac{d\vec{r}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi(\theta) \\ \sin\theta\sin\phi(\theta) \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi\cdot\phi' \\ \cos\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\phi\cdot\phi' \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \hat{e}_\theta + \phi'\sin\theta\,\hat{e}_\phi$$

$$\Rightarrow |\vec{t}| = \sqrt{1+\phi'^2\sin^2\theta} \quad \Rightarrow \hat{t} = \frac{1}{\sqrt{1+\phi'^2\sin^2\theta}}\left(\hat{e}_\theta + \phi'\sin\theta\,\hat{e}_\phi\right)$$

Möchte nun zeigen: $\frac{d\hat{n}}{d\theta} = 0 = \frac{d}{d\theta}\left(\hat{r}\times\hat{t}\right)$. Zuerst das Kreuzprod. ausrechnen, dann ableiten geht etwas schneller.

$$\Rightarrow \hat{n} = \hat{r}\times\hat{t} = \hat{e}_r \times (\hat{e}_\theta + \phi'\sin\theta\,\hat{e}_\phi)\frac{1}{|\vec{t}|} = \frac{1}{|\vec{t}|}\left(\hat{e}_\phi - \phi'\sin\theta\,\hat{e}_\theta\right)$$

$$= \frac{1}{|\vec{t}|}\begin{pmatrix} -\sin\phi - \phi'\sin\theta\cos\theta\cos\phi \\ \cos\phi - \phi'\sin\theta\cos\theta\sin\phi \\ +\phi'\sin^2\theta \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{\phi'\sin^2\theta}{\sqrt{1+\phi'^2\sin^2\theta}}}_{=A}\begin{pmatrix} \frac{-s_\phi - \phi' s_\theta c_\theta c_\phi}{\phi' s_\theta^2} \\ \frac{c_\phi - \phi' s_\theta c_\theta s_\phi}{\phi' s_\theta^2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Betrachte hier nur die Fälle $\phi' \neq 0$, $\theta \neq 0$. Diese Fälle sind in (c) bereits behandelt.)

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

A2F

Ab jetzt komponentenweise:

$$\frac{d}{d\theta}(u_3) = \frac{d}{d\theta}(A) = 0$$

Für $u_{1,2}$, benutze Quotientenregel und betrachte nur den Zähler Z

$$\frac{1}{A}\cdot Z\left(\frac{du_1}{d\theta}\right) = \phi' s_\theta^2 \left(-c_\phi \phi' - \phi'' s_\theta c_\theta c_\phi - \phi' c_\theta^2 c_\phi + \phi' s_\theta^2 c_\phi + \phi'^2 s_\theta c_\theta s_\phi\right)$$

$$+ \left(s_\phi + \phi' s_\theta c_\theta c_\phi\right)\left(\phi'' s_\theta^2 + \phi' 2 s_\theta c_\theta\right)$$

$$= -\phi'^2 s_\theta^2 c_\phi - \phi'^2 s_\theta^2 c_\theta^2 c_\phi + \phi'^2 s_\theta^4 c_\phi + \phi'^3 s_\theta^3 c_\theta s_\phi - \cancel{\phi'\phi'' s_\theta^3 c_\theta c_\phi}$$

$$+ 2\phi' s_\theta c_\theta s_\phi + 2\phi'^2 s_\theta^2 c_\theta^2 c_\phi + \phi'' s_\theta^2 s_\phi + \cancel{\phi'\phi'' s_\theta^3 c_\theta c_\phi} \qquad (*)$$

jetzt verwende $\frac{d(A^2)}{d\theta} = 0$ und betrachte wieder Zähler:

$$Z\left[\frac{d(A^2)}{d\theta}\right] = Z\left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\phi'^2 \sin^4\theta}{1+\phi'^2 \sin^2\theta}\right)\right] = (1+\phi'^2 s_\theta^2)(2\phi'\phi'' s_\theta^4 + 4\phi'^2 s_\theta^3 c_\theta)$$

$$- \phi'^2 s_\theta^4 (2\phi'\phi'' s_\theta^2 + 2\phi'^2 s_\theta c_\theta)$$

$$= 2\phi'\phi'' s_\theta^4 + 4\phi'^2 s_\theta^3 c_\theta + \cancel{2\phi'^3\phi'' s_\theta^6} + 4\phi'^4 s_\theta^5 c_\theta$$

$$- \cancel{2\phi'^3\phi'' s_\theta^6} - 2\phi'^4 s_\theta^5 c_\theta$$

$$= 2\phi' s_\theta^3 \left(\phi'' s_\theta + 2\phi' c_\theta + \phi'^3 s_\theta^2 c_\theta\right) = 0$$

$$\Rightarrow \phi'' s_\theta = -\phi' c_\theta (2 + \phi'^2 s_\theta^2)$$

$$\Rightarrow (*): \cancel{2\phi' s_\theta c_\theta s_\phi} + \phi'^2 s_\theta^2 (\underbrace{c_\theta^2 - 1 + s_\theta^2}_{=0}) c_\phi + \cancel{\phi'^3 s_\theta^3 c_\theta s_\phi}$$

$$- \cancel{2\phi' s_\theta c_\theta s_\phi} - \cancel{\phi'^3 s_\theta^3 c_\theta s_\phi} = 0 \;\checkmark$$

also $\frac{du_1}{d\theta} = 0$

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

A2F

analog: $\frac{1}{A} z\left(\frac{dn_z}{d\theta}\right) = \phi' s_\theta^2 \left(-\phi' s_\phi - \phi'' s_\theta c_\theta s_\phi - \phi' c_\theta^2 s_\phi + \phi' s_\theta^2 s_\phi - \phi'^2 s_\theta c_\theta c_\phi\right)$

$$- (c_\phi - \phi' s_\theta c_\theta s_\phi)(\phi'' s_\theta^2 + 2\phi' s_\theta c_\theta)$$

$$= -\phi'^2 s_\theta^2 s_\phi - \cancel{\phi'\phi'' s_\theta^3 c_\theta s_\phi} - \phi'^2 s_\theta^2 c_\theta^2 s_\phi + \phi'^2 s_\theta^4 s_\phi - \phi'^3 s_\theta^3 c_\theta c_\phi$$

$$\underbrace{-\phi'' s_\theta^2 c_\phi}_{\text{einsetzen}} - 2\phi' s_\theta c_\theta c_\phi + \cancel{\phi'\phi'' s_\theta^3 c_\theta s_\phi} + 2\phi'^2 s_\theta^2 c_\theta^2 s_\phi$$

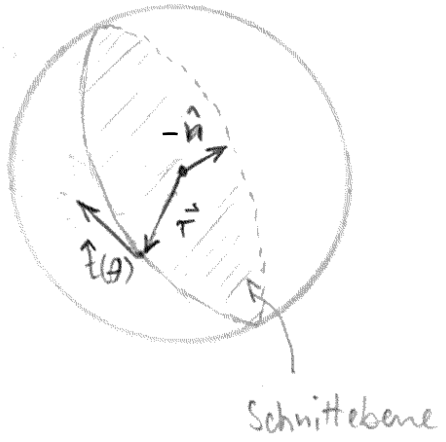
$$= -\phi'^2 s_\theta^2 s_\phi \, (\underbrace{1 - c_\theta^2 + s_\theta^2}_{=0}) - \phi'^3 s_\theta^3 c_\theta c_\phi - 2\phi' s_\theta c_\theta c_\phi$$

$$+ (2\phi' c_\theta + \phi'^3 s_\theta^2 c_\theta) s_\theta c_\phi$$

$$= 0$$

Also insgesamt: $\frac{d\hat{n}}{d\theta} = 0$

Der über $\hat{n} = \hat{r} \times \hat{t}$ definierte Normalenvektor hängt also nicht vom Polarwinkel θ ab und definiert daher tatsächlich Ebenen der in der Skizze gezeigten Form, deren Schnittkurven Großkreise ergeben.



INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

10

A3|

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

a| EW: $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = (\cos\alpha - \lambda)^2 + \sin^2\alpha = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda 2 \cos\alpha + 1 = 0$

$\Rightarrow \lambda_\pm = +\cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1} = +\cos\alpha \pm \sqrt{-\sin^2\alpha} = +\cos\alpha \pm i\sin\alpha$

$\Rightarrow \lambda_\pm \in \mathbb{R}$ für $\alpha = k\cdot\pi$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\lambda_\pm = \pm 1$

Das entspricht der Abbildung eines Vektors auf sich selbst ($\alpha = 0$), also keine Drehung ($\lambda = 1$) oder Spiegelung ($\lambda = -1$; $\alpha = 180°$)

Sonst keine reellen Eigenwerte. Logisch, da der Vektor durch Drehung per Konstruktion seine Richtung ändert!

b) EV aus $(A - \lambda_\pm \cdot \mathbb{1}) = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{v}_+$ aus $\begin{pmatrix} -i\sin\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & -i\sin\alpha \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \sin\alpha & -i\sin\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_+ = \begin{pmatrix} -i \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{v}_-$ $\begin{pmatrix} i\sin\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & i\sin\alpha \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \sin\alpha & +i\sin\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_- = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ ein mögl. Eigensystem: $\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\}$